Exercice 1

1. Montrer que pour tout polynôme P, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)e^{-x}dx$ est convergente.

2. Pour tous P et Q dans $\mathbb{R}[x]$, on pose :

$$\varphi(P,Q)=\int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}dx.$$

Démontrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$.

3. Calculer, pour tous entiers naturel i et j, le produit scalaire des polynômes $P_i : x\mapsto x^i$ et $P_j : x\mapsto x^j$.

Éléments de correction —

1. Soit $P\in\mathbb{R}[x]$. L'application $x\mapsto P(x)e^{-x}$ est continue sur $[0,+\infty[$.
On a par croissances comparées :

$$x^2\Big(P(x)e^{-x}\Big)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

donc :

① $P(x)e^{-x}\Big)\underset{+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$;

② $\forall x\geqslant 1,\ \dfrac{1}{x^2}\geqslant 0$;

③ $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ converge (car $2>1$).

D'après le critère de négligeabilité pour les intégrales, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}P(x)e^{-x}dx$ converge.

Donc $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty}P(x)e^{-x}dx \text{ est convergente.}}$

2. Tout d'abord, l'application φ est bien définie par la question précédente et est à valeurs réelles.

• Soit $(P,Q)\in\mathbb{R}[x]^2$. On a $P(x)Q(x)=Q(x)P(x)$ pour tout $x\in[0,+\infty[$ donc :

$$\int_0^{+\infty}P(x)Q(x)e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}Q(x)P(x)e^{-x}dx,$$

c'est-à-dire $\varphi(P,Q)=\varphi(Q,P)$ *i.e.* φ est <u>symétrique</u>.

• Soit $(P,Q,R)\in\mathbb{R}[x]^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P+Q,R)&=\int_0^{+\infty}(\lambda P+Q)(x)R(x)e^{-x}dx\\&=\int_0^{+\infty}\Big(\lambda P(x)Q(x)+Q(x)R(x)\Big)e^{-x}dx\\&=\lambda\int_0^{+\infty}P(x)Q(x)e^{-x}dx+\int_0^{+\infty}P(x)R(x)e^{-x}dx\end{aligned}$$

par linéarité de l'intégrale et car ces intégrales sont toutes convergentes d'après la première question. On en déduit :

$$\varphi(\lambda P+Q,R)=\lambda\varphi(P,R)+\varphi(Q,R)$$

i.e. φ est linéaire à gauche or φ est symétrique donc φ est <u>bilinéaire</u>.

• Soit $P\in\mathbb{R}[x]$, on a par positivité de l'intégrale sur $[0,+\infty[$:

$$\varphi(P,P)=\int_0^{+\infty}\underbrace{P(x)^2e^{-x}}_{\geqslant 0}dx\geqslant 0$$

Si $\varphi(P,P)=0$ alors la fonction $x\mapsto P(x)^2e^{-x}$ est continue, positive et d'intégrale nulle donc est nulle :

$$\forall x\in[0,+\infty[,\ P(x)^2\underbrace{e^{-x}}_{\neq 0}=0\ \text{ donc }\ \forall x\in[0,+\infty[,\ P(x)=0.$$

Puisque P est un polynôme admettant une infinité de racines, c'est le polynôme nul.
Donc φ est <u>définie positive</u>.

On en déduit que $\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[x].}$

3. Soit $(i,j)\in\mathbb{N}^2$. On a :

$$\begin{aligned}\varphi(P_i,P_j)&=\int_0^{+\infty}P_i(x)P_j(x)e^{-x}dx\\&=\int_0^{+\infty}x^{i+j}e^{-x}dx\\&=\Gamma(i+j+1)\end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{\forall (i,j)\in\mathbb{N}^2,\ \varphi(P_i,P_j)=(i+j)!.}$$

Exercice 2

Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme de E.
On dit que f est une isométrie si, pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\|f(x)\| = \|x\|$.

1. Montrer que si f est une isométrie alors f est un isomorphisme de E.

2. Établir l'équivalence entre les assertions :

  i. f est une isométrie ;

  ii. pour tous x et y dans E, $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

Éléments de correction —

1. On a $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.
Soit $x \in \ker(f)$ alors $f(x) = 0_{\mathrm{E}}$ donc $\|f(x)\| = 0$.
Par hypothèse sur f, on en déduit $\|x\| = 0$ donc $x = 0_{\mathrm{E}}$.
On a donc $\ker(f) \subset \{0_{\mathrm{E}}\}$ et l'autre inclusion est toujours vraie donc $\ker(f) = \{0_{\mathrm{E}}\}$ donc f est injective.
Puisque E est un espace euclidien, E est de dimension finie.
Puisque f est un injective et puisque les espaces de départ et d'arrivée ont la même dimension finie, $\boxed{f \text{ est un isomorphisme de E.}}$

2. $\boxed{\boldsymbol{i} \Rightarrow \boldsymbol{ii}}$ On suppose que f est une isométrie.
Soit $(x, y) \in \mathrm{E}$, on a :

$$\left\|f(x+y)\right\|^2 = \langle f(x+y), f(x+y)\rangle = \|f(x)\|^2 + 2\langle f(x), f(y)\rangle + \left\|f(y)\right\|^2$$

et :

$$\left\|x+y\right\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \left\|y\right\|^2.$$

Puisque f est une isométrie, on a :

$$\left\|f(x+y)\right\| = \left\|x+y\right\|, \ \|f(x)\| = \|x\| \text{ et } \left\|f(y)\right\| = \left\|y\right\|.$$

On déduit alors des deux calculs précédents : $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

$\boxed{\boldsymbol{ii} \Rightarrow \boldsymbol{i}}$ On suppose que : $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2$, $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
Soit $x \in \mathrm{E}$. On appliquant l'hypothèse avec x et x, on a :

$$\|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x)\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$$

d'où $\|f(x)\| = \|x\|$.

On a donc bien :

$$\boxed{f \text{ est une isométrie} \iff \forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \ \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle.}$$

Exercice 3 – d'après EDHEC ECS 2015

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite (d'espérance nulle et de variance égale à 1) et on note Φ la fonction de répartition de X.
On pose $\mathrm{Y} = |\mathrm{X}|$ et on admet que Y est une variable aléatoire ; on note $\mathrm{F_Y}$ sa fonction de répartition.

1. Exprimer, pour tout réel x positif, $\mathrm{F_Y}(x)$ à l'aide de $\Phi(x)$.

2. En déduire que Y est une variable à densité et donner une densité f_{Y} de Y.

3. Montrer que Y admet une espérance et donner sa valeur.

4. Montrer que Y admet une variance et donner sa valeur.

On considère la fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{\pi x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

5. À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{2t}$ (dont on justifiera le caractère licite), montrer que :

$$\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\mathrm{d}u.$$

6. En déduire que g est une densité de probabilité.

Éléments de correction —

1. Soit $x \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{F_Y}(x) &= \mathbb{P}(\mathrm{Y} \leqslant x) \\ &= \mathbb{P}(|\mathrm{X}| \leqslant x) \\ &= \mathbb{P}(-x \leqslant \mathrm{X} \leqslant x) \\ &= \Phi(x) - \Phi(-x) \\ &= \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) \end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{\forall x \geqslant 0, \ \mathrm{F_Y}(x) = 2\Phi(x) - 1.}$$

2. Puisque la variable aléatoire $|X|$ est positive, on a :

$$\forall x < 0,\ F_Y(x) = 0.$$

Comme Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, l'application F_Y est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
On a de plus :

$$F_Y(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0 \text{ et } F_Y(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 2\underbrace{\Phi(0)}_{=1/2} - 1 = 0,$$

d'où la continuité de F_Y en 0 et par conséquent sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que $\boxed{\text{Y est une variable à densité.}}$
On obtient une densité f_Y de Y en dérivant F_Y sur $\mathbb{R}^*$:

$$\boxed{f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.}$$

3. La fonction f_Y est nulle sur $]-\infty, 0]$ donc on s'intéresse à la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f_Y(x)\mathrm{d}x$.
Soit $A \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^A x f_Y(x)\mathrm{d}x &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^A x e^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\Big[-e^{-\frac{1}{2}x^2}\Big]_0^A \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\Big(1 - e^{-\frac{1}{2}A^2}\Big) \\ &\xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}.\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\text{Y admet une espérance}}$ et $\boxed{\mathbb{E}(Y) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}.}$

4. On remarque que $Y^2 = |X|^2 = X^2$ or X suit la loi normale centrée réduite donc X admet un moment d'ordre 2 donc X^2 admet une espérance donc Y^2 également donc Y admet un moment d'ordre 2.
Donc $\boxed{\text{Y admet une variance.}}$
De plus en exploitant la formule du König-Huygens :

$$\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = 1,$$

d'où :

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)^2 \quad \textit{i.e.} \quad \boxed{\mathbb{V}(Y) = 1 - \frac{2}{\pi}.}$$

5. L'application $t \mapsto \sqrt{2t}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et bijective de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$ donc on peut effectuer le changement de variable $u = \sqrt{2t}$ (*i.e.* $t = \frac{1}{2}u^2$ d'où $\mathrm{d}t = u\mathrm{d}u$). D'après le théorème de changement de variable, les deux intégrales suivantes sont de même nature et égales en cas de convergence :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}u^2}}{\sqrt{\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}u} u\mathrm{d}u,$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t \text{ et } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}\mathrm{d}u.$$

Puisque la deuxième converge, on a donc la convergence de la première et :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}\mathrm{d}u.}$$

6. La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}$ est *positive* sur $]0,+\infty[$ et est *continue* comme quotient de deux fonctions continues avec un dénominateur ne s'annulant pas.
D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}\mathrm{d}u \\ &= 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}\mathrm{d}u \\ &= 2\left(1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= 1.\end{aligned}$$

Donc $\boxed{g \text{ est une densité de probabilité.}}$

Problème – Ecricome ECS 2013

Pour tout réel x, on note $\lfloor x\rfloor$ la partie entière de x, c'est-à-dire l'unique entier relatif N tel que $N \leqslant x < N+1$.
Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On définit X_d sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ X_d(\omega) = \lfloor X(\omega)\rfloor.$$

On admet que X_d est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on l'appelle «la discrétisée de X.»
Le problème consiste :

- à étudier quelques propriétés de la discrétisée de variables suivant quelques lois usuelles (partie **I**) ;
- puis à étudier plus spécifiquement le cas où les variables possèdent une densité définie par un polynôme (partie **II**) ;
- et enfin à établir qu'une variable discrète, satisfaisant à certaines conditions, est la variable discrétisée d'une variable à densité (partie **III**).

Les parties **I**, **II** et **III** sont largement indépendantes.

— Partie I — Calculs de discrétisées

1. En Python, une fois le module `numpy` importé, l'instruction `floor(x)` renvoie la partie entière du réel `x` et l'instruction `random()` renvoie un réel appartenant à l'intervalle $[0,1[$ en simulant une loi uniforme sur cet intervalle.

On rappelle que si Z suit la loi uniforme sur $[0,1[$ alors aZ suit la loi uniforme sur $[0,a[$.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,a[$ (avec $a \geqslant 0$) et X_d sa discrétisée.

Écrire une fonction Python, de variable un réel a positif, qui renvoie une réalisation de X_d (*i.e.* qui simule X_d).

2. Soit X une variable aléatoire possédant une densité f. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \mathbb{P}(X_d = k) = \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x.$$

3. Soit N un entier naturel non nul et X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, N]$.

Déterminer la loi de X_d (on précisera la valeurs prises par X_d).

4. Établir que l'on définit bien une variable aléatoire discrète Y en posant :

$$\begin{cases} Y(\Omega) = \{1, 2, \dots, 9\} \\ \text{et } \forall k \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{\ln(10)} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \end{cases}.$$

Proposer une densité f telle que si une variable aléatoire X possède f pour densité alors X_d suit la loi de Y.

5. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et n un entier naturel non nul. On pose $Y_n = \frac{\lfloor nX\rfloor}{n}$.

a. Justifier que la variable nX possède une densité f_n que l'on précisera.

b. Donner la loi de la variable $\lfloor nX\rfloor$. Vérifier que $\lfloor nX\rfloor + 1$ suit une loi connue dont on donnera le nom et le paramètre.

c. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, prouver que : $\mathbb{P}(Y_n \leqslant x) = 1 - \exp\left(-\dfrac{\lambda\big(\lfloor nx\rfloor + 1\big)}{n}\right)$.

d. Donner un encadrement simple de $\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}$ puis étudier la limite quand n tend vers l'infini de $\mathbb{P}(Y_n \leqslant x)$ (en fonction de x).

— Partie II — Discrétisées de lois «polynomiales»

On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des fonctions polynômes à coefficients réels de degré au plus n et on pose :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\},\ e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^k.$$

Si Q appartient à $\mathbb{R}_n[x]$ alors on pose $u(Q)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u(Q)(x) = \int_x^{x+1} Q(t)\mathrm{d}t.$$

6. Pour tout entier $k \in \{0, \dots, n\}$, calculer $u(e_k)$ puis exprimer $u(e_k)$ en fonction de $e_0, \dots, e_n$.

7. Établir la linéarité de u et justifier que si $Q \in \mathbb{R}_n[x]$ alors $u(Q) \in \mathbb{R}_n[x]$.

8. Établir que la famille $(u(e_k))_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

9. Justifier que pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique polynôme $Q_R \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ R(x) = \int_x^{x+1} Q_R(t)\mathrm{d}t.$$

10. En considérant $n=1$, expliciter Q_R lorsque : $\forall x \in \mathbb{R},\ R(x)=\dfrac{x}{6}$.

11. Soit N un entier naturel et X une variable aléatoire dont f est une densité.

a. On suppose qu'il existe un entier naturel n et un polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[x]$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} f(x)=Q(x) & \text{si } x \in [0, N+1[\\ f(x)=0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Établir l'existence d'un polynôme $R \in \mathbb{R}[x]$ tel que :

$$\begin{cases} X_d(\Omega)=\{0,\dots,N\} \\ \forall k \in X_d(\Omega),\ \mathbb{P}(X_d=k)=R(k) \end{cases}.$$

b. On considère la variable aléatoire discrète Y définie par :

$$\begin{cases} Y(\Omega)=\{0,1,2,3\} \\ \forall k \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}(Y=k)=\dfrac{k}{6} \end{cases}.$$

Montrer qu'il n'existe aucun polynôme $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que :

$$\forall x \in [0,4[,\ f(x)=Q(x)$$

et tel que $Y=X_d$.

Indication : procéder par l'absurde et constater que l'une des propriétés des densités n'est pas satisfaite.

— Partie III — Variables dénombrables et discrétisées

On considère une variable aléatoire Y définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ainsi qu'une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ qui soit de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ et telles que :

$$Y(\Omega)=\mathbb{N} \text{ et : } \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Y=k)=g(k).$$

En particulier, la série $\sum_{k\geqslant 0} g(k)$ converge et : $\sum_{k=0}^{+\infty} g(k)=1$.

On suppose en outre que g est <u>décroissante</u> et qu'il existe un réel $C \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \left|g'(x)\right| \leqslant \frac{C}{(1+x)^2} \text{ et } \left|g''(x)\right| \leqslant \frac{C}{(1+x)^2}.$$

Pour tout réel x, on pose :

$$\begin{cases} f(x)=-\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} g'(x+k) & \text{si } x \geqslant 0 \\ f(x)=0 & \text{si } x<0 \end{cases}.$$

12. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Prouver la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 0} g'(x+k)$. Quel est le signe de f ?

13. ***a.*** Établir que :

$$\forall (x,a) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \left|g'(x+k)-g'(a+k)\right| \leqslant \frac{C|x-a|}{(k+1)^2}.$$

b. Prouver l'existence d'un réel $D \geqslant 0$ tel que :

$$\forall (x,a) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ |f(x)-f(a)| \leqslant D|x-a|.$$

Justifier la continuité de f en tout réel $a \in \mathbb{R}_+$.

14. Soit t un réel positif, pour tout entier N, on pose :

$$S_N(t)=-\sum_{k=0}^{N} g'(t+k) \text{ et } R_N(t)=-\sum_{k=N+1}^{+\infty} g'(t+k).$$

a. Démontrer que :

$$\forall k \geqslant 1,\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ \frac{1}{(t+k+1)^2} \leqslant \frac{1}{t+k}-\frac{1}{t+k+1},$$

puis que :

$$\forall N \geqslant 0,\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ |R_N(t)| \leqslant \frac{C}{N+1}.$$

b. Prouver que :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = g(0)-g(N+1)+\int_0^1 R_N(t)\mathrm{d}t.$$

c. Justifier que :

$$g(k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = g(0).$$

15. ***a.*** Vérifier que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ f(t+1) - f(t) = g'(t),$$

puis que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) = \int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t.$$

b. Pour tout entier $N \geqslant 0$, on pose $S_N = \displaystyle\int_0^N f(t)\mathrm{d}t$. Établir que :

$$\forall N \geqslant 1,\ S_N = \sum_{k=0}^{N-1} g(k),$$

puis que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ S_{\lfloor x \rfloor} \leqslant \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \leqslant S_{\lfloor x \rfloor + 1}.$$

En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et préciser sa valeur.

c. Démontrer que f peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire X et que sa discrétisée X_d suit la même loi que Y.

Éléments de correction —

1.

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def Xd(a):
    return np.floor(a*rd.random())
```

2. On a $[X_d = k] = [\lfloor X \rfloor = k] = [k \leqslant X < k+1]$ donc :

$$\mathbb{P}(X_d = k) = \mathbb{P}(k \leqslant X < k+1) = \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x.$$

3. Notons que X prend ses valeurs dans $[0, N]$ et donc X_d prend ses valeurs dans $[\![0, N]\!]$. De plus, $\mathbb{P}(X_d = N) = \mathbb{P}(X = N) = 0$. Pour $k \in [\![0, N-1]\!]$:

$$\mathbb{P}(X_d = k) = \int_k^{k+1} \frac{1}{N}\mathrm{d}t = \frac{1}{N}.$$

Donc X_d suit la loi uniforme sur $[\![0, N-1]\!]$.

4. Les $\mathbb{P}(Y = k)$ sont positifs, il s'agit donc de vérifier que $\sum\limits_{k=1}^{9} \mathbb{P}(Y = k) = 1$. On a :

$$\sum_{k=1}^{9} \frac{1}{\ln(10)} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \frac{1}{\ln(10)} \sum_{k=1}^{9} \Big(\ln(k+1) - \ln(k)\Big) = \frac{1}{\ln(10)}(\ln(10) - \ln(1)) = 1.$$

Cherchons donc une densité f telle que, pour tout $k \in [\![1, 9]\!]$:

$$\int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln(10)} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \frac{1}{\ln(10)}(\ln(k+1) - \ln(k)).$$

Par exemple, soit f la fonction définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{1}{\ln(10)} \frac{1}{t} & \text{si } 1 \leqslant t < 10 \\ 0 & \text{si } t \geqslant 10 \end{cases}$$

Alors f est positive, continue sauf en 0 et en 10 et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln(10)} \int_1^{10} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{\ln(10)} [\ln(t)]_1^{10} = 1.$$

Donc f est bien une densité de probabilité, et on a, pour tout $k \in [\![1, 9]\!]$:

$$\int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t = \int_k^{k+1} \frac{1}{\ln(10)} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{\ln(10)}(\ln(k+1) - \ln(k)) = \frac{1}{\ln(10)} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \mathbb{P}(Y = k).$$

Et pour $k \notin [\![1,9]\!]$, $\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t = 0$.

Ainsi, si X possède f pour densité, alors X_d a même loi que Y.

5. ***a.*** La variable nX est une transformée affine d'une variable à densité donc elle possède une densité donnée par :

$$f_n : t \mapsto \frac{1}{n} f_X\left(\frac{t}{n}\right) = \begin{cases} \frac{\lambda}{n} e^{-\frac{\lambda}{n}t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc nX suit la loi exponentielle $\mathscr{E}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$.

b. D'après la question 2, on a pour tout $k \in \mathbf{Z}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\lfloor nX \rfloor = k) &= \int_k^{k+1} f_n(t)\mathrm{d}t \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0 \\ e^{-\lambda k/n} - e^{-\lambda(k+1)/n} & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0 \\ e^{-\lambda k/n}\left(1 - e^{-\lambda/n}\right) & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\lfloor nX \rfloor + 1$ prend ses valeurs dans $\mathbf{N}^*$, et pour $k \geqslant 1$:

$$\mathbb{P}(\lfloor nX \rfloor + 1 = k) = \mathbb{P}(\lfloor nX \rfloor = k-1) = \left(e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)^{k-1}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)$$

Il s'agit d'une loi géométrique de paramètre $1 - e^{-\lambda/n}$.

c. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_n \leqslant x) &= \mathbb{P}\left(\frac{\lfloor nX \rfloor}{n} \leqslant x\right) \\ &= \mathbb{P}(\lfloor nX \rfloor \leqslant nx) \\ &= \mathbb{P}(nX < \lfloor nx \rfloor + 1). \end{aligned}$$

Puisque $nX \hookrightarrow \mathscr{E}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$, il vient :

$$\mathbb{P}(Y_n \leqslant x) = \mathbb{P}(nX < \lfloor nX \rfloor + 1) = \mathbb{P}(nX \leqslant \lfloor nx \rfloor + 1) = 1 - \exp\left(-\frac{\lambda(\lfloor nx \rfloor + 1)}{n}\right).$$

d. On a : $\lfloor nx \rfloor \leqslant nx < \lfloor nx \rfloor + 1$ donc $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leqslant nx$ puis :

$$x - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x.$$

D'après le théorème d'encadrement, on a :

$$\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x.$$

Donc d'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, on a :

$$\mathbb{P}(Y_n \leqslant x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 - e^{-\lambda x}.$$

Notons que, pour $x < 0$, on a $\mathbb{P}(Y_n \leqslant x) = 0$ donc la limite est nulle dans ce cas.

6. Soit $k \in [\![0,n]\!]$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u(e_k) &= \int_x^{x+1} t^k \mathrm{d}t \\ &= \frac{(x+1)^{k+1} - x^{k+1}}{k+1} \\ &= \frac{1}{k+1}\left((x+1)^{k+1} - x^{k+1}\right) \\ &= \frac{1}{k+1}\left(\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}x^i - x^{k+1}\right) \\ &= \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}x^i \\ &= \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}e_i(x). \end{aligned}$$

Donc $u(e_k) = \displaystyle\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}e_i$.

7. Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[x]^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} u(\lambda P + Q)(x) &= \int_x^{x+1} (\lambda P(t) + Q(t))\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_x^{x+1} P(t)\mathrm{d}t + \int_x^{x+1} Q(t)\mathrm{d}t \\ &= \lambda u(P)(x) + u(Q)(x). \end{aligned}$$

Donc $u(\lambda P + Q) = \lambda u(P) + u(Q)$ et u est linéaire.

De plus, si $P \in \mathbb{R}_n[x]$ alors il existe des réels $a_0, \ldots, a_n$ tels que $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k e_k$ donc, par linéarité de u :

$$u(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k u(e_k)$$

or, à la question précédente, nous avons prouvé que $u(e_k) \in \mathbb{R}_n[x]$ donc $u(P) \in \mathbb{R}_n[x]$. Donc u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

8. D'après le calcul de la question **6**, $u(e_k)$ est de degré k or une famille de polynômes de degrés deux à deux distincts est libre, donc $(u(e_k))_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille libre.
Cette famille contient $n+1$ vecteurs et $\dim \mathbf{R}_n[x] = n+1$ donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

9. L'image de la base $(e_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ par u est encore une base de $\mathbb{R}_n[x]$ donc u est donc un isomorphisme.
Donc, pour tout $R \in \mathbb{R}_n[x]$, il existe un unique $Q_R \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $u(Q_R) = R$. Soit encore :

$$\forall x \in \mathbb{R}, R(x) = \int_k^{k+1} Q_R(t)\mathrm{d}t.$$

10. Puisque $Q_R \in \mathbb{R}_1[x]$, cherchons Q_R sous la forme $Q_R(x) = ax + b$.
On veut alors :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \frac{x}{6} = \int_x^{x+1} (at+b)\mathrm{d}t = \left[a\frac{t^2}{2} + bt\right]_x^{x+1} = \frac{a}{2}\left((x+1)^2 - x^2\right) + b = ax + \frac{a}{2} + b$$

Par identification des coefficients, il vient $a = \frac{1}{6}$ et $b + \frac{a}{2} = 0$ donc $b = -\frac{1}{12}$. Donc :

$$Q_R(x) = \frac{1}{6}x - \frac{1}{12}.$$

11. ***a.*** Notons que pour tout $k \notin [\![0, N]\!]$:

$$\mathbb{P}(X_d = k) = \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t = \int_k^{k+1} 0\mathrm{d}t = 0.$$

Donc $X_d(\Omega) = [\![0, N]\!]$.
Soit R l'unique polynôme tel que $u(Q) = R$. Alors, pour tout $k \in [\![0, N]\!]$:

$$\mathbb{P}(X_d = k) = \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t = \int_k^{k+1} Q(t)\mathrm{d}t = u(Q)(k) = R(k).$$

b. Supposons qu'un tel polynôme existe.
Alors, on doit avoir, pour tout $k \in [\![0, 3]\!]$, $u(Q)(k) = \frac{k}{6}$.
En particulier, $u(Q)(0) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0$.
Puisque f est une densité, f est positive donc pour tout $t \in [0, 1]$, $Q(t) = f(t) \geqslant 0$.
L'intégrale d'une fonction continue et positive est nulle si et seulement si cette fonction est nulle, donc pour tout $t \in [0, 1]$, $Q(t) = 0$.
Ceci signifie donc que le polynôme Q possède une infinité de racines, et donc que $Q = 0$.
Donc, pour tout $x \in [0, 4[$, $f(x) = Q(x) = 0$.
Alors $\mathbb{P}(Y = 1) = \displaystyle\int_1^2 f(t)\mathrm{d}t = 0$, contredisant ¶$(Y = 1) = \frac{1}{6}$.
L'hypothèse de départ est donc absurde : il n'existe pas de polynôme Q tel que, pour tout $x \in [0, 4[$, $f(x) = Q(x)$ et Y soit la discrétisée de X.

12. D'après les hypothèses, on a pour tout $k \in \mathbf{N}$:

$$\left|g'(x+k)\right| \leqslant \frac{C}{(1+x+k)^2} \leqslant \frac{C}{(k+1)^2}.$$

La série de terme général $\frac{C}{(k+1)^2}$ converge donc, d'après le critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum g'(x+k)$ converge absolument donc converge.
De plus, g étant décroissante sur $\mathbb{R}_+$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $g'(t) \leqslant 0$. Et en particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $g'(x+k) \leqslant 0$.
On en déduit que $f(x) = -\sum_{k=0}^{+\infty} g'(x+k) \geqslant 0$.

13. ***a.*** Puisque g est de classe $\mathscr{C}^2$, g' est de classe $\mathscr{C}^1$ donc il est possible d'appliquer l'inégalité des accroissements finis à g' entre $x+k$ et $a+k$.
Notons I l'intervalle d'extrémités $x+k$ et $a+k$. Pour tout $t \in I$, on a :

$$\left|g''(t)\right| \leqslant \frac{C}{(1+t)^2} \leqslant \frac{C}{(k+1)^2}$$

donc :

$$\left|g'(x+k) - g'(a+k)\right| \leqslant C\frac{|(x+k)-(a+k)|}{(k+1)^2} \leqslant \frac{C|x-a|}{(k+1)^2}.$$

b. En sommant les relations précédemment obtenues pour k variant dans $\mathbb{N}$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left|g'(x+k) - g'(a+k)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{C}{(k+1)^2}|x-a|$$

or, par inégalité triangulaire, on a :

$$|f(x) - f(a)| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} g'(a+k) - g'(x+k)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\left|g'(x+k) - g'(a+k)\right| \leqslant C\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)^2}|x-a|$$

donc, en posant $D = C\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \geqslant 0$, on a :

$$\forall (x,a) \in \mathbf{R}_+^2, |f(x) - f(a)| \leqslant D|x-a|.$$

En particulier, lorsque $x \to a$, il vient, par le théorème d'encadrement : $f(x) - f(a) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

Donc f est continue en a, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$.

14. ***a.*** On a, pour $k \in \mathbf{N}^*$ et $t \in \mathbf{R}_+$, $t+k+1 \geqslant t+k$ donc :

$$\frac{1}{t+k} - \frac{1}{t+k+1} = \frac{1}{(t+k)(t+k+1)} \geqslant \frac{1}{(t+k+1)^2}.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} |R_N(t)| &= \left|\sum_{k=N+1}^{+\infty} g'(t+k)\right| \\ &\leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} \left|g'(t+k)\right| \\ &\leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{C}{(t+k+1)^2}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité précédemment obtenue, on a sous réserve de convergence :

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{(t+k+1)^2} \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{t+k} - \frac{1}{t+k+1}\right)$$

Mais, pour $M \geqslant N+1$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=N+1}^{M} \left(\frac{1}{t+k} - \frac{1}{t+k+1}\right) &= \sum_{k=N+1}^{M} \frac{1}{t+k} - \sum_{k=N+1}^{M} \frac{1}{t+k+1} \\ &= \sum_{k=N+1}^{M} \frac{1}{t+k} - \sum_{i=N+2}^{M+1} \frac{1}{t+i} \\ &= \frac{1}{t+N+1} - \frac{1}{t+M+1} \\ &\xrightarrow[M\to+\infty]{} \frac{1}{t+N+1} \end{aligned}$$

On en déduit que la série de terme général $\left(\frac{1}{t+k} - \frac{1}{t+k+1}\right)$ converge et que sa somme vaut $\frac{1}{t+N+1}$.

Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on a $\frac{1}{t+N+1} \leqslant \frac{1}{N+1}$ donc :

$$|R_N(t)| \leqslant \frac{C}{N+1}.$$

b. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, et tout $N \in \mathbb{N}$ on a $f(t) = S_N(t) + R_N(t)$ donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t &= -\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{N} g'(t+k)\right)\mathrm{d}t + \int_0^1 R_N(t)\mathrm{d}t \\ &= -\sum_{k=0}^{N} \int_0^1 g'(t+k)\mathrm{d}t + \int_0^1 R_N(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Pour $k \in [\![0, N]\!]$, on a :

$$\int_0^1 g'(t+k)\mathrm{d}t = [g(x+k)]_0^1 = g(k+1) - g(k)$$

donc :

$$\sum_{k=0}^{N} \int_0^1 g'(t+k)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{N} (g(k+1) - g(k)) = g(N+1) - g(0)$$

puis :

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = -(g(N+1) - g(0)) + \int_0^1 R_N(t)\mathrm{d}t = g(0) - g(N+1) + \int_0^1 R_N(t)\mathrm{d}t.$$

c. Puisque la série de terme général $g(k)$ converge, le terme général tend vers 0 :

$$g(k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

Pour $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left|\int_0^1 R_N(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 |R_N(t)|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{C}{N+1}\mathrm{d}t \leqslant \frac{C}{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

donc, en faisant tendre N vers $+\infty$ dans la relation précédente, il vient :

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \lim_{N\to+\infty} g(0) - g(N+1) + \int_0^1 R_N(t)\mathrm{d}t = g(0).$$

15. ***a.*** Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors :

$$f(t+1)-f(t) = -\sum_{k=0}^{+\infty} g'(t+k+1) + \sum_{k=0}^{+\infty} g'(t+k) = -\sum_{i=1}^{+\infty} g'(t+i) + \sum_{k=1}^{+\infty} g'(t+i) + g'(t) = g'(t).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$g(x) = \int_0^x g'(t)\mathrm{d}t + g(0) = \int_0^x (f(t+1)-f(t)) + \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x f(t+1)\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

Par le changement de variable $u = t+1$, on a $\displaystyle\int_0^x f(t+1)\mathrm{d}t = \int_1^{x+1} f(u)\mathrm{d}u$ donc :

$$g(x) = \int_1^{x+1} f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t.$$

b. Pour $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} g(k) = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} \int_k^{k+1} g(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\mathrm{N}} g(t)\mathrm{d}t.$$

De plus, f étant positive, on a :

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\lfloor x \rfloor} f(t)\mathrm{d}t + \int_{\lfloor x \rfloor}^x f(t)\mathrm{d}t$$

mais, par croissance de l'intégrale (car $\lfloor x \rfloor \leqslant x$) :

$$\int_x^{\lfloor x \rfloor} f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Donc :

$$\mathrm{S}_{\lfloor x \rfloor} = \int_0^{\lfloor x \rfloor} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

De même, on a :

$$\int_0^{\lfloor x \rfloor+1} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \underbrace{\int_x^{\lfloor x \rfloor+1} f(t)\mathrm{d}t}_{\geqslant 0}$$

donc :

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\lfloor x \rfloor+1} f(t)\mathrm{d}t = \mathrm{S}_{\lfloor x \rfloor+1}.$$

Nous avons donc bien :

$$\mathrm{S}_{\lfloor x \rfloor} \leqslant \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{S}_{\lfloor x \rfloor+1}.$$

On a $\lfloor x \rfloor \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} g(k) = 1$ donc par le théorème d'encadrement :

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1.$$

Donc $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.

c. La fonction f est continue sur $]-\infty, 0[$ car constante, et nous avons prouvé à la question **13.*b*** qu'elle est continue sur $]0;+\infty[$. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 0. La fonction f est positive d'après la question **12**, et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$$

donc f est une densité de probabilités.

Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}_d = k) = \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t = g(k) = \mathbb{P}(\mathrm{Y} = k)$$

donc X_d a même loi que Y.