

Consignes

- L'énoncé comporte trois exercices et un problème.
Ces derniers peuvent être traités dans un ordre quelconque mais doivent être chacun commencés sur une nouvelle page et les questions doivent être séparées d'une ligne horizontale sur toute la largeur de la page.
- Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.
- La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- Les résultats doivent être mis en valeur et les pages doivent être numérotées.

Exercice 1

1. Montrer que pour tout polynôme P , l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(x)e^{-x}dx$ est convergente.
2. Pour tous P et Q dans $\mathbb{R}[x]$, on pose :

$$\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}dx.$$

Démontrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$.

3. Calculer, pour tous entiers naturels i et j , le produit scalaire des polynômes $P_i : x \mapsto x^i$ et $P_j : x \mapsto x^j$.

Exercice 2

Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme de E .
On dit que f est une isométrie si, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$.

1. Montrer que si f est une isométrie alors f est un isomorphisme de E .
2. Établir l'équivalence entre les assertions :
 - i. f est une isométrie ;
 - ii. pour tous x et y dans E , $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

Exercice 3

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite (d'espérance nulle et de variance égale à 1) et on note Φ la fonction de répartition de X .

On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire ; on note F_Y sa fonction de répartition.

1. Exprimer, pour tout réel x positif, $F_Y(x)$ à l'aide de $\Phi(x)$.
2. En déduire que Y est une variable à densité et donner une densité f_Y de Y .
3. Montrer que Y admet une espérance et donner sa valeur.
4. Montrer que Y admet une variance et donner sa valeur.

On considère la fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

5. À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{2t}$ (dont on justifiera le caractère licite), montrer que :

$$\int_0^{+\infty} g(t)dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du.$$

6. En déduire que g est une densité de probabilité.

Problème

Pour tout réel x , on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x , c'est-à-dire l'unique entier relatif N tel que $N \leq x < N + 1$. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On définit X_d sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ par :

$$\forall \omega \in \Omega, X_d(\omega) = \lfloor X(\omega) \rfloor.$$

On admet que X_d est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on l'appelle «la discrétisée de X .»

Le problème consiste :

- à étudier quelques propriétés de la discrétisée de variables suivant quelques lois usuelles (partie I);
- puis à étudier plus spécifiquement le cas où les variables possèdent une densité définie par un polynôme (partie II);
- et enfin à établir qu'une variable discrète, satisfaisant à certaines conditions, est la variable discrétisée d'une variable à densité (partie III).

Les parties I, II et III sont largement indépendantes.

— Partie I — Calculs de discrétisées

1. En Python, une fois le module `numpy` importé, l'instruction `floor(x)` renvoie la partie entière du réel x et l'instruction `random()` renvoie un réel appartenant à l'intervalle $[0, 1[$ en simulant une loi uniforme sur cet intervalle.

On rappelle que si Z suit la loi uniforme sur $[0, 1[$ alors aZ suit la loi uniforme sur $[0, a[$.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, a[$ (avec $a \geq 0$) et X_d sa discrétisée.

Écrire une fonction Python, de variable un réel a positif, qui renvoie une réalisation de X_d (i.e. qui simule X_d).

2. Soit X une variable aléatoire possédant une densité f . Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}(X_d = k) = \int_k^{k+1} f(x) dx.$$

3. Soit N un entier naturel non nul et X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, N]$. Déterminer la loi de X_d (on précisera la valeurs prises par X_d).
4. Établir que l'on définit bien une variable aléatoire discrète Y en posant :

$$\begin{cases} Y(\Omega) = \{1, 2, \dots, 9\} \\ \text{et } \forall k \in Y(\Omega), \mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{\ln(10)} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \end{cases} .$$

Proposer une densité f telle que si une variable aléatoire X possède f pour densité alors X_d suit la loi de Y .

5. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et n un entier naturel non nul. On pose $Y_n = \frac{\lfloor nX \rfloor}{n}$.
 - a. Justifier que la variable nX possède une densité f_n que l'on précisera.
 - b. Donner la loi de la variable $\lfloor nX \rfloor$. Vérifier que $\lfloor nX \rfloor + 1$ suit une loi connue dont on donnera le nom et le paramètre.
 - c. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, prouver que : $\mathbb{P}(Y_n \leq x) = 1 - \exp\left(-\frac{\lambda(\lfloor nx \rfloor + 1)}{n}\right)$.
 - d. Donner un encadrement simple de $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ puis étudier la limite quand n tend vers l'infini de $\mathbb{P}(Y_n \leq x)$ (en fonction de x).

— Partie II — Discrétisées de lois «polynomiales»

On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des fonctions polynômes à coefficients réels de degré au plus n et on pose :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, e_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^k.$$

Si Q appartient à $\mathbb{R}_n[x]$ alors on pose $u(Q)$ la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(Q)(x) = \int_x^{x+1} Q(t) dt.$$

6. Pour tout entier $k \in \{0, \dots, n\}$, calculer $u(e_k)$ puis exprimer $u(e_k)$ en fonction de e_0, \dots, e_n .
7. Établir la linéarité de u et justifier que si $Q \in \mathbb{R}_n[x]$ alors $u(Q) \in \mathbb{R}_n[x]$.
8. Établir que la famille $(u(e_k))_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
9. Justifier que pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique polynôme $Q_R \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, R(x) = \int_x^{x+1} Q_R(t) dt.$$

10. En considérant $n = 1$, expliciter Q_R lorsque : $\forall x \in \mathbb{R}, R(x) = \frac{x}{6}$.
11. Soit N un entier naturel et X une variable aléatoire dont f est une densité.
 - a. On suppose qu'il existe un entier naturel n et un polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[x]$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(x) = Q(x) & \text{si } x \in [0, N+1[\\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Établir l'existence d'un polynôme $R \in \mathbb{R}[x]$ tel que :

$$\begin{cases} X_d(\Omega) = \{0, \dots, N\} \\ \forall k \in X_d(\Omega), \mathbb{P}(X_d = k) = R(k) \end{cases}.$$

- b. On considère la variable aléatoire discrète Y définie par :

$$\begin{cases} Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\} \\ \forall k \in Y(\Omega), \mathbb{P}(Y = k) = \frac{k}{6} \end{cases}.$$

Montrer qu'il n'existe aucun polynôme $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que :

$$\forall x \in [0, 4], f(x) = Q(x)$$

et tel que $Y = X_d$.

Indication : procéder par l'absurde et constater que l'une des propriétés des densités n'est pas satisfaite.

— Partie III — Variables dénombrables et discrétisées

On considère une variable aléatoire Y définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ainsi qu'une fonction $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui soit de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+ et telles que :

$$Y(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } : \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(Y = k) = g(k).$$

En particulier, la série $\sum_{k \geq 0} g(k)$ converge et : $\sum_{k=0}^{+\infty} g(k) = 1$.

On suppose en outre que g est décroissante et qu'il existe un réel $C \geq 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, |g'(x)| \leq \frac{C}{(1+x)^2} \text{ et } |g''(x)| \leq \frac{C}{(1+x)^2}.$$

Pour tout réel x , on pose :

$$\begin{cases} f(x) = -\sum_{k=0}^{+\infty} g'(x+k) & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

12. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Prouver la convergence de la série $\sum_{k \geq 0} g'(x+k)$. Quel est le signe de f ?

13. a. Établir que :

$$\forall (x, a) \in (\mathbb{R}_+)^2, \forall k \in \mathbb{N}, |g'(x+k) - g'(a+k)| \leq \frac{C|x-a|}{(k+1)^2}.$$

b. Prouver l'existence d'un réel $D \geq 0$ tel que :

$$\forall (x, a) \in (\mathbb{R}_+)^2, |f(x) - f(a)| \leq D|x - a|.$$

Justifier la continuité de f en tout réel $a \in \mathbb{R}_+$.

14. Soit t un réel positif, pour tout entier N , on pose :

$$S_N(t) = - \sum_{k=0}^N g'(t+k) \text{ et } R_N(t) = - \sum_{k=N+1}^{+\infty} g'(t+k).$$

a. Démontrer que :

$$\forall k \geq 1, \forall t \in \mathbb{R}_+, \frac{1}{(t+k+1)^2} \leq \frac{1}{t+k} - \frac{1}{t+k+1},$$

puis que :

$$\forall N \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}_+, |R_N(t)| \leq \frac{C}{N+1}.$$

b. Prouver que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \int_0^1 f(t)dt = g(0) - g(N+1) + \int_0^1 R_N(t)dt.$$

c. Justifier que :

$$g(k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)dt = g(0).$$

15. a. Vérifier que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, f(t+1) - f(t) = g'(t),$$

puis que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt.$$

b. Pour tout entier $N \geq 0$, on pose $S_N = \int_0^N f(t)dt$. Établir que :

$$\forall N \geq 1, S_N = \sum_{k=0}^{N-1} g(k),$$

puis que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, S_{[x]} \leq \int_0^x f(t)dt \leq S_{[x]+1}.$$

En déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ et préciser sa valeur.

c. Démontrer que f peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire X et que sa discrétisée X_d suit la même loi que Y .