Notions abordées et objectifs

- Algèbre bilinéaire.
  - Produit scalaire, norme associée.
  - Inégalité de Cauchy-Schwarz.
  - Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux, théorème de Pythagore.
  - Familles (finies) orthogonales, familles (finies) orthonormées.
  - Espaces euclidiens, existence de bases orthonormées.
  - Coordonnées et norme d'un vecteur dans une base orthonormée.
  - Expression matricielle d'un produit scalaire et de la norme euclidienne dans une base orthonormée.
  - Changement de bases orthonormées, notion de matrice orthogonale.
  - Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel, complétion d'une famille orthonormée en une base orthonormée.
- Fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}^n$.
  - Notion de fonction définie sur $\mathbb{R}^n$, graphe, lignes de niveau (pour $n=2$).
  - Notion de continuité d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Opérations sur les fonctions continues.
  - Fonctions partielles, dérivées partielles d'ordre 1 et 2, gradient en un point.
  - Notion de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.
  - Développement limité d'ordre 1 d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
  - Dérivation de $t \mapsto f(\mathbf{x}+t\mathbf{h})$ avec f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.
  - Notion d'extremum local, global, de point critique. Condition nécessaire du premier ordre.

► Note aux colleurs :

- L'algorithme d'orthonormalisation de Schmidt a été pratiqué sur quelques exemples mais n'est pas exigible.
- Les fonctions de plusieurs variables sont censées être définies sur $\mathbb{R}^n$ pour le moment.

► Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :

1. Montrer que pour tous $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ dans E :

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2+\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2=2\|\mathbf{u}\|^2+2\|\mathbf{v}\|^2 \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \frac{1}{4}\Big(\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2-\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2\Big).$$

2. ***a.*** Justifier que l'application suivante est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a,b])$:

$$(f,g)\mapsto \langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t,$$

puis expliciter l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ce produit scalaire.

b. Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ne s'annulant pas sur $[0,1]$. Montrer que :

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\cdot\int_0^1\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \geqslant 1$$

et préciser le cas d'égalité.

3. Montrer que l'application suivante définit un produit scalaire dans $\mathbb{R}_n[x]$:

$$(\mathrm{P},\mathrm{Q})\mapsto\langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}(k)\mathrm{Q}(k),$$

puis montrer que les polynômes de Lagrange $\mathrm{L}_0,\mathrm{L}_1,\dots,\mathrm{L}_n$ associés aux réels $0,1,\dots,n$ constituent une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[x]$.

4. On suppose $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique $\langle \mathrm{X},\mathrm{Y}\rangle = {}^t\mathrm{X}\mathrm{Y}$.

a. Montrer que si une matrice $\mathrm{P}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale alors, pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $\|\mathrm{PX}\|=\|\mathrm{X}\|$.

b. On suppose réciproquement qu'une matrice $\mathrm{P}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est telle que, pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on ait $\|\mathrm{PX}\|=\|\mathrm{X}\|$.

i. Montrer que pour tous X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $\langle \mathrm{PX},\mathrm{PY}\rangle=\langle \mathrm{X},\mathrm{Y}\rangle$.

ii. En déduire que la matrice P est orthogonale.

5. Soit $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux vecteurs non nuls d'un espace euclidien E. Établir l'équivalence entre les assertions :

i. les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont orthogonaux ;

ii. pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on a $\|\lambda\mathbf{u}+\mathbf{v}\|\geqslant\|\mathbf{v}\|$.

6. Soit $\mathscr{F}=(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_p)$ une famille orthonormée d'un espace euclidien $(\mathrm{E},\langle\cdot,\cdot\rangle)$. Montrer que :

$$\forall \mathbf{u}\in\mathrm{E},\ \sum_{i=1}^{p}\langle\mathbf{u},\mathbf{e}_i\rangle^2\leqslant\|\mathbf{u}\|^2.$$

7. Soit E un espace euclidien et E^* l'espace vectoriel des formes linéaires sur E. Pour tout $\mathbf{u}\in\mathrm{E}$, on définit $\Phi_{\mathbf{u}}$ par :

$$\Phi_{\mathbf{u}}:\mathrm{E}\to\mathbb{R},\mathbf{x}\mapsto\langle\mathbf{u},\mathbf{x}\rangle.$$

a. Vérifier que pour tout $\mathbf{u}\in\mathrm{E}$, $\Phi_{\mathbf{u}}\in\mathrm{E}^*$.

b. On pose alors : $\Phi:\mathrm{E}\to\mathrm{E}^*,\mathbf{u}\mapsto\Phi_u$.
Montrer que Φ est un isomorphisme.

8. Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme de E.
On dit que f est une isométrie si, pour tout $x\in\mathrm{E}$, $\|f(x)\|=\|x\|$.

a. Montrer que si f est une isométrie alors f est un isomorphisme de E.

b. Établir l'équivalence entre les assertions :

i. f est une isométrie ;

ii. pour tous x et y dans E, $\langle f(x),f(y)\rangle=\langle x,y\rangle$.