TD 12 – Fonctions de plusieurs variables

Exercice 12-1

Déterminer le domaine de définition des fonctions de deux variables définies ci-dessous puis calculer leur gradient :

a. $f(x,y) = x^2 + 3xy - 2y^2 + 1$

b. $f(x,y) = \sqrt{3x+2y}$

c. $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$

d. $f(x,y) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

e. $f(x,y) = \ln(x^2 + 3y^2)$

f. $f(x,y) = (x^2 + y^2)\mathrm{e}^{-xy}$

Exercice 12-2

Étudier les extremums de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = (x-y)\mathrm{e}^{xy}.$$

Exercice 12-3

Étudier les extremums de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x+y} + \mathrm{e}^{3-x} + \mathrm{e}^{3-y}.$$

Exercice 12-4

Étudier les extremums de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = x^4 - 2x^2y^2 + 2y^2.$$

Exercice 12-5

On considère la fonction $f :]0,+\infty[^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = x^{\ln x} + y^{\ln y} + z^{\ln z}.$$

Déterminer les points en lesquels le gradient de f est nul.
La fonction f présente-t-elle en ces points un extremum ?

Exercice 12-6

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + xyz - z + y.$$

Déterminer les points en lesquels le gradient de f est nul.
La fonction f présente-t-elle en ces points un extremum ?

Exercice 12-7

- **Partie I : étude d'une fonction d'une variable réelle**

On considère l'application $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0;+\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t\ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty]$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t \in]0;+\infty[$.
3. Dresser le tableau des variations de f. On précisera la limite de f en $+\infty$.
4. Montrer que f est convexe sur $]0;+\infty[$.
5. On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

a. Montrer que Γ admet une demi-tangente en O et préciser celle-ci.
b. Déterminer les points d'intersection de Γ et, de l'axe des abscisses.
c. Préciser la nature de la branche infinie de Γ.
d. Tracer l'allure de Γ. On admet : $0,36 \leq \mathrm{e}^{-1} < 0,37$.

- **Partie Il : étude d'une fonction de deux variables réelles**

On considère l'application $\mathrm{F} :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$, définie, pour tout $(x,y) \in]0;+\infty[^2$ par :

$$\mathrm{F}(x,y) = \frac{\ln(x)}{y} + \frac{\ln(y)}{x}.$$

1. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout (x,y) de $]0;+\infty[^2$.
2. Montrer que (e,e) est un point critique de F.
3. Est-ce que F admet un extremum local en (e,e) ?