CHAPITRE

X

COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE BILINÉAIRE

Sommaire

Dans tout le chapitre, on considère un espace euclidien E de dimension n dont on note $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme.

Dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on considère le produit scalaire canonique donné par $\langle \mathrm{X},\mathrm{Y}\rangle = {}^t\mathrm{X}\mathrm{Y}$ et on note encore $\|\cdot\|$ la norme associée.

A - Matrices et endomorphismes symétriques

A.1 - Définitions et exemples

Tout d'abord, on rappelle qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite ***symétrique*** lorsque ${}^t\mathrm{A} = \mathrm{A}$ ce qui revient à la condition :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \mathrm{A}[i,j] = \mathrm{A}[j,i].$$

On rappelle également que l'ensemble des matrices symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ et dont une base est constituée par les matrices :

$$\mathrm{E}_{i,i} \text{ avec } i \in [\![1,n]\!] \quad \text{et} \quad \mathrm{E}_{i,j} + \mathrm{E}_{j,i} \text{ avec } (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \text{ et } i < j.$$

Définition X-1

On dit qu'un endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est un ***endomorphisme symétrique*** de E lorsque :

$$\forall (\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathrm{E}^2,\ \langle \varphi(\mathbf{u}),\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u},\varphi(\mathbf{v})\rangle.$$

Exemples

1 ▹ Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (2x-6y,-6x-7y)$..

Il s'agit d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ et, pour tous (x,y) et (x',y') de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}\langle \varphi(x,y),(x',y')\rangle &= \langle (2x-6y,-6x-7y),(x',y')\rangle\\ &= (2x-6y)x' + (-6x-7y)y'\\ &= x(2x'-6y') + y(-6x'-7y')\\ &= \langle (x,y),\varphi(x',y')\rangle.\end{aligned}$$

Donc φ est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^2$.

2 ▹ On suppose que E est de dimension $n \geqslant 2$ et que $\mathbf{u}_0$ est un vecteur non nul de E. Pour tout réel $a \geqslant 0$, on note :

$$\varphi_a : \mathrm{E} \to \mathrm{E},\ \mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} + a\langle \mathbf{u},\mathbf{u}_0\rangle \mathbf{u}_0.$$

Il s'agit d'un endomorphisme de E. De plus, pour tous vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ de E :

$$\begin{aligned}\langle \varphi_a(\mathbf{u}),\mathbf{v}\rangle &= \langle \mathbf{u} + a\langle \mathbf{u},\mathbf{u}_0\rangle \mathbf{u}_0,\mathbf{v}\rangle\\ &= \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle + a\langle \mathbf{u},\mathbf{u}_0\rangle\langle \mathbf{u}_0,\mathbf{v}\rangle\\ &= \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle + a\langle \mathbf{v},\mathbf{u}_0\rangle\langle \mathbf{u},\mathbf{u}_0\rangle\\ &= \langle \mathbf{u},\mathbf{v} + a\langle \mathbf{v},\mathbf{u}_0\rangle \mathbf{u}_0\rangle\\ &= \langle \mathbf{u},\varphi_a(\mathbf{v})\rangle\end{aligned}$$

donc φ_a est un endomorphisme symétrique de E.

3 ▹ Soit F un sous-espace strict de E et p la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

Il s'agit d'un endomorphisme de E. De plus, pour tous vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ de E, on écrit :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_F + \mathbf{u}_{F^\perp} \text{ et } \mathbf{v} = \mathbf{v}_F + \mathbf{v}_{F^\perp}$$

avec $\mathbf{u}_F \in F$, $\mathbf{v}_F \in F$, $\mathbf{u}_{F^\perp} \in F^\perp$ et $\mathbf{v}_{F^\perp} \in F^\perp$. Alors :

$$\begin{aligned}
\langle p(\mathbf{u}), \mathbf{v}\rangle &= \langle p(\mathbf{u}_F + \mathbf{u}_{F^\perp}), \mathbf{v}\rangle \\
&= \langle \mathbf{u}_F, \mathbf{v}\rangle \\
&= \langle \mathbf{u}_F, \mathbf{v}_F + \mathbf{v}_{F^\perp}\rangle \\
&= \langle \mathbf{u}_F, \mathbf{v}_F\rangle + \langle \mathbf{u}_F, \mathbf{v}_{F^\perp}\rangle \\
&= \langle \mathbf{u}_F, \mathbf{v}_F\rangle \\
&= \langle \mathbf{u}_F, \mathbf{v}_F\rangle + \langle \mathbf{u}_{F^\perp}, \mathbf{v}_F\rangle \\
&= \langle \mathbf{u}_F + \mathbf{u}_{F^\perp}, \mathbf{v}_F\rangle \\
&= \langle \mathbf{u}, p(\mathbf{v}_F + \mathbf{v}_{F^\perp})\rangle \\
&= \langle \mathbf{u}, p(\mathbf{v})\rangle
\end{aligned}$$

donc p est un endomorphisme symétrique de E.

Remarque

Soit $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$ une famille génératrice de E. Un endomorphisme φ de E est symétrique si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in [\![1, m]\!]^2,\ \langle \varphi(\mathbf{e}_i), \mathbf{e}_j\rangle = \langle \mathbf{e}_i, \varphi(\mathbf{e}_j)\rangle.$$

Il est clair que si φ est symétrique alors on a la relation ci-dessus. Réciproquement, on suppose cette relation vraie et l'on considère deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ de E que l'on écrit :

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{e}_i \text{ et } \mathbf{v} = \sum_{j=1}^{m} \mu_j \mathbf{e}_j$$

où les λ_i, μ_j sont des réels. Alors :

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v}\rangle &= \langle \varphi\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{e}_i\right), \sum_{j=1}^{m} \mu_j \mathbf{e}_j\rangle \\
&= \langle \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi(\mathbf{e}_i), \sum_{j=1}^{m} \mu_j \mathbf{e}_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_j \langle \varphi(\mathbf{e}_i), \mathbf{e}_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_j \langle \mathbf{e}_i, \varphi(\mathbf{e}_j)\rangle \\
&= \langle \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^{m} \mu_j \varphi(\mathbf{e}_j)\rangle \\
&= \langle \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{e}_i, \varphi\left(\sum_{j=1}^{m} \mu_j \mathbf{e}_j\right)\rangle \\
&= \langle \mathbf{u}, \varphi(\mathbf{v})\rangle
\end{aligned}$$

donc φ est bien symétrique.

Exercice C-126

Soit f et g deux endomorphismes symétriques de E.

1. Montrer que si f et g commutent alors $f \circ g$ est symétrique.

2. On souhaite prouver la réciproque. On suppose donc $f \circ g$ symétrique.

  a. Simplifier, pour tous $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ de E, $\langle \mathbf{u}, f \circ g(\mathbf{v}) - g \circ f(\mathbf{v}) \rangle$.

  b. En déduire que f et g commutent.

A.2 - Caractérisation matricielle

Proposition X-2

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Il y a équivalence entre les assertions suivantes :

i. φ est un endomorphisme symétrique de E ;

ii. il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E telle que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ soit une matrice symétrique ;

iii. pour toute base orthonormée $\mathscr{B}$ de E, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ est une matrice symétrique.

Démonstration

Tout d'abord considérons une base orthonormée $\mathscr{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ alors, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$:

$$\varphi\left(\mathbf{e}_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{e}_i, \varphi\left(\mathbf{e}_j\right) \rangle \mathbf{e}_i$$

donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{e}_1, \varphi(\mathbf{e}_1) \rangle & \langle \mathbf{e}_1, \varphi(\mathbf{e}_2) \rangle & \cdots & \langle \mathbf{e}_1, \varphi(\mathbf{e}_n) \rangle \\ \langle \mathbf{e}_2, \varphi(\mathbf{e}_1) \rangle & \langle \mathbf{e}_2, \varphi(\mathbf{e}_2) \rangle & \cdots & \langle \mathbf{e}_2, \varphi(\mathbf{e}_n) \rangle \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle \mathbf{e}_n, \varphi(\mathbf{e}_1) \rangle & \langle \mathbf{e}_n, \varphi(\mathbf{e}_2) \rangle & \cdots & \langle \mathbf{e}_n, \varphi(\mathbf{e}_n) \rangle \end{pmatrix}.$$

La remarque de la page précédente assure que φ est symétrique si et seulement si, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\langle \mathbf{e}_i, \varphi\left(\mathbf{e}_j\right) \rangle = \langle \mathbf{e}_j, \varphi(\mathbf{e}_i) \rangle$ ce qui correspond à l'égalité des coefficients aux emplacements (i, j) et (j, i) dans la matrice précédente donc à la symétrie de cette matrice.

Les équivalences annoncées en découlent.

Exemples

1 ▹ Considérons à nouveau l'exemple de $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (2x - 6y, -6x - 7y)$..

La matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est : $\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$.

2 ▹ Soit F un sous-espace strict de E et p la projection sur F parallèlement à $\mathrm{F}^\perp$.

On considère une base $\mathscr{B}$ orthonormée, adaptée à la décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp$, alors la matrice de p dans cette base est $\mathrm{E}_{1,1} + \mathrm{E}_{2,2} + \cdots + \mathrm{E}_{r,r}$ où r est la dimension de F.

Remarque

Notons que si A et B sont deux matrices représentant un même endomorphisme dans des bases orthonormées différentes alors on a une relation de la forme $\mathrm{A} = {}^t\mathrm{PBP}$ où P est la matrice de passage d'une base à l'autre (donc orthogonale).

Il s'ensuit que A est symétrique si et seulement si B est symétrique ce qui justifie autrement le fait que ***ii*** implique ***iii***.

A.3 - Sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique

Proposition X-3

Soit φ un endomorphisme symétrique de E et F un sous-espace vectoriel de E.

Si F est stable par φ alors $F^{\perp}$ est également stable par φ.

Démonstration

Soit $\mathbf{u} \in F^{\perp}$, montrons que $\varphi(\mathbf{u}) \in F^{\perp}$.

Soit $\mathbf{v} \in F$ alors :

$$\langle \varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \varphi(\mathbf{v}) \rangle.$$

Puisque $\mathbf{v} \in F$ et puisque F est stable par φ, on a $\varphi(\mathbf{v}) \in F$ or $\mathbf{u} \in F^{\perp}$ donc :

$$\langle \mathbf{u}, \varphi(\mathbf{v}) \rangle = 0 \quad \text{puis} \quad \langle \varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = 0.$$

On en déduit que $\varphi(\mathbf{u}) \in F^{\perp}$.

Remarque

En particulier, $\ker(\varphi)^{\perp}$ et $\mathrm{Im}(\varphi)^{\perp}$ sont stables par φ.

Proposition X-4

Soit φ un endomorphisme symétrique de E.

Si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont deux vecteurs propres de φ associés à des valeurs propres distinctes, alors les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont orthogonaux.

Démonstration

Soit $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux vecteurs propres de φ associés à des valeurs propres λ et μ distinctes. On a :

$$\langle \varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \varphi(\mathbf{v}) \rangle$$

donc :

$$\langle \lambda\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mu\mathbf{v} \rangle$$

c'est-à-dire :

$$\lambda\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mu\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

Puisque $\lambda \neq \mu$, on a donc $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

Remarque

Plus généralement, si $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p$ sont des vecteurs propres de φ associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, alors la famille $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p)$ est orthogonale.

Corollaire X-5

Soit φ un endomorphisme symétrique de E.

Les sous-espaces propres de φ sont deux à deux orthogonaux.

Exemple

Considérons l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$. L'application suivante est alors un endomorphisme symétrique :

$$\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M \mapsto {}^tM.$$

Il y a deux valeurs propres : -1 et 1. De plus E_1 est le sous-espace des matrices symétriques et E_{-1} est celui des matrices antisymétriques. Ces deux sous-espaces sont orthogonaux.

B - Réduction

B.1 - Le théorème spectral

Théorème X-6

Soit φ un endomorphisme symétrique de E.

Alors φ est diagonalisable et il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de φ.

Démonstration

On prouvera dans le prochain chapitre (sur les fonctions de plusieurs variables) que tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien admet au moins une valeur propre réelle.

On démontre par récurrence sur l'entier k la propriété :

$\mathscr{P}(k)$: « tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien de dimension k est diagonalisable dans une base orthonormée. »

▹ En dimension 1, tout endomorphisme est de la forme $\lambda \mathrm{id}_E$ donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

▹ Soit $k \geqslant 1$. On suppose que, pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, $\mathscr{P}(j)$ est vraie.

Soit φ un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien de dimension $k+1$ et λ une valeur propre de φ, on note $E_\lambda(\varphi)$ le sous-espace propre associé.

Si $E_\lambda(\varphi) = E$ alors $\varphi = \lambda \mathrm{id}_E$ donc φ est diagonalisable dans une b.o.n de E.

Sinon, $E_\lambda(\varphi) \neq E$ et $E_\lambda(\varphi)$ est stable par φ donc $E_\lambda(\varphi)^\perp$ est également stable par φ.

Notons ψ la restriction de φ à $E_\lambda(\varphi)^\perp$ (qui n'est pas réduit à $\{0_E\}$). On a :

$$\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in (E_\lambda(\varphi)^\perp)^2,\ \langle \psi(\mathbf{u}), \mathbf{v}\rangle = \langle \varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \varphi(\mathbf{v})\rangle = \langle \mathbf{u}, \psi(\mathbf{v})\rangle$$

donc ψ est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien $E_\lambda(\varphi)^\perp$ (espace euclidien pour la restriction du produit scalaire).

Puisque $\dim E_\lambda(\varphi)^\perp \in [\![1,k]\!]$, il existe par hypothèse de récurrence une base de $E_\lambda(\varphi)^\perp$ formée de vecteur propres de ψ donc de φ.

En réunissant une base de $E_\lambda(\varphi)$ avec cette base, on obtient une base de E formée de vecteurs propres de φ. Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

▹ Par récurrence, la propriété $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour tout $k \geqslant 1$.

Exemples

1 ▹ Considérons à nouveau $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (2x-6y, -6x-7y)$..

2 ▹ On considère $\varphi_a : E \to E,\ \mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} + a\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_0\rangle \mathbf{u}_0$ où $\mathbf{u}_0$ est un vecteur non nul de E et $a \geqslant 0$.

On a :

$$\varphi_a(\mathbf{u}_0) = \mathbf{u}_0 + a\langle \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0\rangle \mathbf{u}_0 = \left(1 + a\|\mathbf{u}_0\|^2\right)\mathbf{u}_0$$

or $\mathbf{u}_0 \neq 0_E$ donc $\mathbf{u}_0$ est vecteur propre pour la valeur propre $\lambda = 1 + a\|u_0\|^2$ (notons que $\lambda > 1$ puisque $a \geqslant 0$).

De plus, pour tout $\mathbf{u} \in \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_0)^{\perp}$, on a :

$$\varphi_a(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + a\underbrace{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_0 \rangle}_{=0} \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}$$

donc le réel 1 est donc une seconde valeur propre pour φ_a.

On a :

$$\dim \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_0) = 1 \quad \text{et} \quad \dim \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_0)^{\perp} = n-1$$

donc :

$$\dim(\mathrm{E}_1) + \dim(\mathrm{E}_\lambda) \geqslant n$$

donc il y a égalité des dimensions et φ_a est bien diagonalisable dans une b.o.n de E.

Pour déterminer une telle base, on peut ajouter le vecteur normée $\frac{\mathbf{u}_0}{\|\mathbf{u}_0\|}$.

B.2 - Version matricielle

Proposition X-7

Si A est une matrice symétrique réelle alors A est diagonalisable.

Plus précisément, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale réelle D telles que $\mathrm{D} = {}^t\mathrm{PAP}$.

Démonstration

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. Puisque la base canonique est orthonormée pour le produit scalaire canonique, φ est un endomorphisme symétrique. D'après le résultat précédent, φ est diagonalisable dans une b.o.n. et on peut considérer la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à cette base. Alors P est une matrice orthogonale et ${}^t\mathrm{PAP}$ est bien diagonale.

C - Projection orthogonale

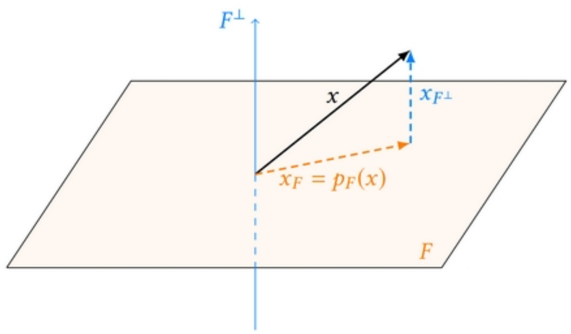
C.1 - Définition et caractérisations

Définition X-8

Soit E un espace euclidien et F un sous-espace de E.

On appelle ***projection orthogonale*** p de E sur F la projection de E sur F parallèlement à $F^{\perp}$.

Pour tout $\mathbf{x}$ de E, le vecteur $p(\mathbf{x})$ est appelé le projeté orthogonal de $\mathbf{x}$ sur F.



Remarques

1 ▹ On a :

$$\mathbf{y} = p_{\mathrm{F}}(\mathbf{x}) \iff \begin{cases} \mathbf{y} & \in & \mathrm{F} \\ \mathbf{x}-\mathbf{y} & \in & \mathrm{F}^{\perp}. \end{cases}$$

2 ▹ Un projecteur p est orthogonal si et seulement si $\mathrm{Im}(p)$ et $\ker(p)$ sont supplémentaires orthogonaux ce qui revient au fait que $\mathrm{E}_0(p)$ et $\mathrm{E}_1(p)$ soient des supplémentaires orthogonaux de E .

3 ▹ Pour tout vecteur $\mathbf{x}$ de E, on a : $\langle p(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle = \|p(\mathbf{x})\|^2$.

Exemple

On considère l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire donné par $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^t AB)$ et on considère :

$$p : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M \mapsto p(M) = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}{}^t M.$$

Montrons que p est une projection orthogonale.

Proposition X-9

Soit p un projecteur d'un espace euclidien E. Il y a équivalence entre :

i. le projecteur p est orthogonal.

ii. l'endomorphisme p est symétrique.

Démonstration

L'implication ***i***$\Rightarrow$ ***ii.*** a été vue à l'exemple 3 page 3.

Réciproquement, on suppose que p est symétrique. Soit $\mathbf{u} \in \ker(p)$ et $\mathbf{v} \in \mathrm{Im}(p)$ alors (puisque p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$), on a $\mathbf{v} = p(\mathbf{v})$ donc (puisque p est supposé symétrique) :

$$\langle \mathbf{u}, p(\mathbf{v})\rangle = \langle p(\mathbf{u}), \mathbf{v}\rangle = \langle 0_E, \mathbf{v}\rangle = 0.$$

Le noyau et l'image de p sont des sous-espaces orthogonaux de E donc p est un projecteur orthogonal.

Exercice C-127

1. Soit E un espace euclidien, $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E, p un endomorphisme et A la matrice de p dans la base $\mathscr{B}$. Montrer qu'il y a équivalence entre :
   - ***i.*** l'endomorphisme p est un projecteur orthogonal ;
   - ***ii.*** la matrice A est symétrique et $A^2 = A$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des $\frac{1}{n}$.

   Montrer que J_n est la matrice dans la base canonique d'une projection orthogonale donc on précisera l'image.

Proposition X-10

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E, on note p_F la projection orthogonale sur F. Si $\mathcal{B}_F = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$ est une base orthonormée de F, alors pour tout vecteur $\mathbf{u}$ de E :

$$p_F(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{p} \langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i.$$

Démonstration

On peut compléter $\mathcal{B}_F$ en une base orthonormée $\mathcal{B} = \left(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}_{p+1}, \dots, \mathbf{e}_n\right)$ de E. Soit $\mathbf{u} \in E$, alors :

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i}_{\in F} + \underbrace{\sum_{i=p+1}^{n} \langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i}_{\in F^\perp}$$

et par définition du projecteur orthogonal sur F : $p_F(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{p} \langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i$.

Exemples

1 ▹ *Projection sur une droite vectorielle*

Considérons une droite vectorielle $F = \mathrm{Vect}(\mathbf{e})$ (où $\mathbf{e} \neq 0_E$) alors $(\tilde{\mathbf{e}}) = \left(\frac{1}{\|\mathbf{e}\|}\mathbf{e}\right)$ est une b.o.n. de F donc pour tout vecteur $\mathbf{u}$ de E, on a :

$$p_F(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{e}} \rangle \tilde{\mathbf{e}} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{e} \rangle}{\|\mathbf{e}\|^2}\mathbf{e}.$$

2 ▹ ***Projection sur un hyperplan***

Soit H un hyperplan de E alors $H^\perp$ est une droite vectorielle donc on peut considérer un vecteur non nul et unitaire $\mathbf{u}_0$ de $H^\perp$. En notant q la projection orthogonale sur $H^\perp$, on a :

$$\forall \mathbf{u} \in E,\ q(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_0 \rangle \mathbf{u}_0,$$

d'où en notant p_H la projection orthogonale sur H :

$$\forall \mathbf{u} \in E,\ p_H(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_0 \rangle \mathbf{u}_0.$$

3 ▹ Dans $\mathbb{R}^3$, déterminons le projeté de $\mathbf{u} = (0,-1,4)$ sur $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x - 2y + 3z = 0\right\}$.

∘ Déterminons tout d'abord une base de F. Soit $\mathbf{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \in F &\iff x - 2y + 3z = 0 \\ &\iff x = 2y - 3z \\ &\iff \mathbf{v} = (2y - 3z, y, z) = y.(2,1,0) + z.(-3,0,1) \end{aligned}$$

donc les vecteurs $\mathbf{u}_1 = (2,1,0)$ et $\mathbf{u}_2 = (-3,0,1)$ engendrent F or ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre donc ils forment une base de F.

∘ Puisque $p_F(\mathbf{u}) \in F$, il existe des réels λ_1 et λ_2 tels que :

$$p_F(\mathbf{u}) = \lambda_1.\mathbf{u}_1 + \lambda_2.\mathbf{u}_2 = (2\lambda_1 - 3\lambda_2, \lambda_1, \lambda_2).$$

Puisque $\mathbf{u} - p_F(\mathbf{u}) \in F^\perp$, on a :

$$\langle \mathbf{u} - p_F(\mathbf{u}), \mathbf{u}_1 \rangle = 0 \ \text{ et } \ \langle \mathbf{u} - p_F(\mathbf{u}), \mathbf{u}_2 \rangle = 0.$$

On a $\mathbf{u} - p_F(\mathbf{u}) = (-2\lambda_1 + 3\lambda_2, -1 - \lambda_1, 4 - \lambda_2)$ donc on obtient :

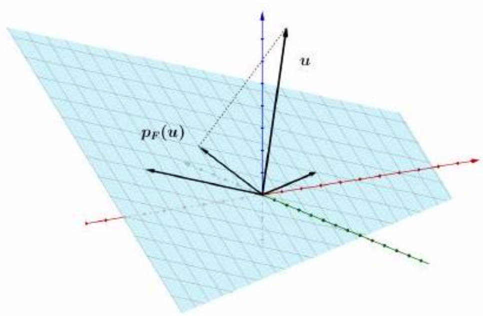
$$2(-2\lambda_1 + 3\lambda_2) + (-1 - \lambda_1) = 0 \ \text{ et } \ -3(-2\lambda_1 + 3\lambda_2) + 4 - \lambda_2 = 0$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} -5\lambda_1 + 6\lambda_2 = 1 \\ 6\lambda_1 - 10\lambda_2 = -4 \end{cases} \quad \textit{i.e.} \quad \begin{cases} -5\lambda_1 + 6\lambda_2 = 1 \\ -14\lambda_2 = -14 \end{cases}$$

et $(1,1)$ est l'unique solution de ce système.

Donc $p_F(\mathbf{u}) = (-1,1,1)$.



C.2 - Applications

C.2.a - Distance à un sous-espace vectoriel

Théorème et définition X-11

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E, on note p_{F} la projection orthogonale sur F.

Soit $\mathbf{u} \in \mathrm{E}$. On définit la ***distance de* u *à*** F par :

$$d(\mathbf{u}, \mathrm{F}) = \min_{\mathbf{v} \in \mathrm{F}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

Cette expression est bien définie et vérifie :

$$d(\mathbf{u}, \mathrm{F}) = \|\mathbf{u} - p_{\mathrm{F}}(\mathbf{u})\|.$$

De plus, ce minimum n'est atteint que pour $\mathbf{v} = p_{\mathrm{F}}(\mathbf{u})$.

Démonstration

Remarques

1 ▹ Le projeté orthogonal de **u** à F est l'unique vecteur $p_{\mathrm{F}}(\mathbf{u})$ de F vérifiant :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathrm{E},\ \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \geqslant \|\mathbf{u} - p_{\mathrm{F}}(\mathbf{u})\|,$$

ce qui revient à :

$$\mathbf{v} = p_{\mathrm{F}}(\mathbf{u}) \iff \begin{cases} \mathbf{v} \in \mathrm{F} \\ \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \min_{\mathbf{w} \in \mathrm{F}} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| \end{cases}.$$

2 ▹ Puisque les vecteurs $p_{\mathrm{F}}(\mathbf{u})$ et $\mathbf{u} - p_{\mathrm{F}}(\mathbf{u})$ sont orthogonaux, le théorème de Pythagore donne :

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u} - p_{\mathrm{F}}(\mathbf{u}) + p_{\mathrm{F}}(\mathbf{u})\|^2 = \|\mathbf{u} - p_{\mathrm{F}}(\mathbf{u})\|^2 + = \|p_{\mathrm{F}}(\mathbf{u})\|^2$$

donc :

$$d(\mathbf{u}, \mathrm{F})^2 = \|\mathbf{u} - p_{\mathrm{F}}(\mathbf{u})\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - \|p_{\mathrm{F}}(\mathbf{u})\|^2.$$

Exercice C-128

Soit $\mathbf{u}_0$ un vecteur non nul de E et $\mathbf{x}$ un vecteur de E.

Exprimer la distance de $\mathbf{x}$ aux sous-espaces $\mathrm{Vect}(\mathbf{u}_0)$ et $\mathrm{Vect}(\mathbf{u}_0)^\perp$.

Exercice C-129

Déterminer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} \left(t^2 - at - b\right)^2 \mathrm{d}t$.

C.2.b - Problème des moindres carrés

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ et $\mathbf{b}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Si f n'est pas surjective (par exemple si $p < n$) alors il n'existe pas nécessairement de vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ tel que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$. On peut donc chercher à obtenir un vecteur $\mathbf{x}$ dont l'image soit «proche» (en un sens à préciser) de $\mathbf{b}$. On munit l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique, on veut justifier l'existence de :

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^p} \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\|$$

et trouver un vecteur réalisant ce minimum. Cela revient à chercher :

$$\min_{\mathbf{y}\in\mathrm{Im}(f)} \|\mathbf{y} - \mathbf{b}\|.$$

D'après la partie précédente, ce minimum est atteint lorsque $\mathbf{y}$ est le projeté orthogonal de $\mathbf{b}$ sur le sous-espace $\mathrm{Im}(f)$ de E.

Notons que si f est injective (*i.e.* $\mathrm{rg}(f) = p$) alors ce vecteur est unique ; dans le cas contraire, tout vecteur de la forme $p_{\mathrm{Im}(f)}(\mathbf{b}) + \mathbf{z}$, avec $\mathbf{z} \in \ker(f)$, convient également.

Proposition X-12 (version matricielle)

Soit n et p deux entiers avec $1 \leqslant p \leqslant n$, $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Alors il existe un unique $\mathrm{X}_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ minimisant l'expression $\|\mathrm{AX} - \mathrm{B}\|$ sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice C-130

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer l'unique $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ qui minimise $\|\mathrm{AX} - \mathrm{B}\|$.