CHAPITRE XI

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

C-138

⋆ Tout d'abord, la fonction f est polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$. De plus, on a pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$\nabla f(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y).$$

⋆ On note $\mathscr{H}$ l'ensemble des solutions de l'équation $x+y+z=0$ alors $\mathscr{H}^\perp = \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$.
Un vecteur $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2)$ est un point critique de f sous la contrainte $\mathscr{C}$ si seulement si :

$$\begin{cases} a_0+a_1+a_2 = 1 \\ \exists\lambda\in\mathbb{R} \;/\; (a_1+a_2, a_0+a_2, a_0+a_1) = \lambda(1,1,1) \end{cases}$$

ce qui donne après calculs $a_0 = a_1 = a_2 = \frac{1}{3}$.
Donc f possède un unique point critique sous la contrainte $\mathscr{C}$, c'est $\mathbf{a} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
⋆ Pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a :

$$\mathrm{H} = \nabla^2 f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On étudie les valeurs propres de H et l'on trouve $\mathrm{Sp(H)} = \{-1, 2\}$.

Soit $\mathbf{h}\in\mathscr{H}$, on a $\mathbf{a}+\mathbf{h}\in\mathscr{C}$, et :

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + 0 + \frac{1}{2}q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|^2\,\varepsilon(\mathbf{h})$$

avec $\varepsilon(\mathbf{h}) \xrightarrow[\mathbf{h}\to 0_{\mathbb{R}^n}]{} 0$.
Puisque $\mathbf{h}\in\mathscr{H}$, on peut noter $\mathbf{h} = (\alpha, \beta, -\alpha-\beta)$ ce qui donne :

$$\begin{aligned} q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h}) &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta & -\alpha-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\alpha-\beta \end{pmatrix} \\ &= -\alpha^2 - \beta^2 - (\alpha+\beta)^2. \end{aligned}$$

On en déduit que pour $\mathbf{h}\in\mathscr{H}$ au voisinage de $0_{\mathbb{R}^n}$, on a :

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) \leqslant f(\mathbf{a})$$

donc f admet en $\mathbf{a}$ un maximum local sous la contrainte $\mathscr{C}$.

⋆ Examinons maintenant s'il s'agit d'un maximum global (sous la contrainte $\mathscr{C}$). On fixe $\mathbf{h}\in\mathscr{H}$ et on considère la fonction :

$$g : t \longmapsto f(\mathbf{a}+t\mathbf{h})$$

qui est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. La formule de Taylor avec reste intégral donne :

$$g(t) = g(0) + tg'(0) + \int_0^t (t-u)\, g''(u)\,\mathrm{d}u$$

soit :

$$f(\mathbf{a}+t\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + t\langle\nabla f(\mathbf{a}), \mathbf{h}\rangle + \int_0^t (t-u)\, q_{\mathbf{a}+u\mathbf{h}}(\mathbf{h})\,\mathrm{d}u$$

or la hessienne est la même en tout point donc on a $q_{\mathbf{a}+u\mathbf{h}} = q_{\mathbf{a}}$ puis :

$$f(\mathbf{a}+t\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + 0 + q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})\int_0^t (t-u)\,\mathrm{d}u$$

d'où après le calcul de l'intégrale :

$$f(\mathbf{a}+t\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \frac{t^2}{2}q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h}).$$

Puisque $q_{\mathbf{a}}$ est à valeurs négatives on a donc pour tout $\mathbf{h}\in\mathscr{H}$ et tout $t\in\mathbb{R}$:

$$f(\mathbf{a}+t\mathbf{h}) \leqslant f(\mathbf{a})$$

ce qui montre que :

$$\forall \mathbf{x}\in\mathscr{C},\; f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{a})$$

donc f admet en $\mathbf{a}$ un maximum global sous la contrainte $\mathscr{C}$.