CHAPITRE

XII

CONVERGENCE ET APPROXIMATION

Sommaire

A - Inégalités

Proposition XII-1 (inégalité de Markov)

Soit X une variable aléatoire réelle *positive* admettant une espérance.

Pour tout réel $\lambda > 0$, on a :

$$\mathbb{P}(X \geqslant \lambda) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}.$$

Démonstration

De façon générale, pour tout événement A, on définit l'application indicatrice de A, notée $\mathbb{1}_A$, par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

L'application $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbb{P}(A)$ donc :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A).$$

Par conséquent, pour toute variable aléatoire positive X, la croissance de l'espérance donne :

$$X \geqslant \lambda \mathbb{1}_{(X \geqslant \lambda)} \quad \text{puis} \quad \mathbb{E}(X) \geqslant \lambda \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(X\geqslant\lambda)}) = \lambda \mathbb{P}(X \geqslant \lambda).$$

Proposition XII-2 (inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire réelle admettant une variance.

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a :

$$\mathbb{P}\Big(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Démonstration

Exemple

Si $\mathbb{E}(X) = 10$ et $\sigma(X) = 0,1$ sont les valeurs exactes de la moyenne et de l'écart-type d'une variable aléatoire X, sans aucune indication particulière sur la loi de X, on sait que X prendra des valeurs entre 9,7 et 10,3 avec une probabilité supérieure à 0,88. En effet :

$$\mathbb{P}(|X - 10| \geqslant 0,3) \leqslant \frac{(0,1)^2}{(0,3)^2} = \frac{1}{9} \quad \text{puis} \quad \mathbb{P}(|X - 10| < 0,3) = 1 - \mathbb{P}(|X - 10| \geqslant 0,3) \geqslant 1 - \frac{1}{9} \approx 0,88.$$

Exercice C-140

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

Montrer que : $\mathbb{P}(X \geqslant \lambda^2) \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$ et $\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$.

Exercice C-141

Soit Y une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a : $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{1}{n}Y - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.

B - Convergence en probabilité

Définition XII-3

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X des variables aléatoires réelles toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On dit que la suite (X_n) ***converge en probabilité*** vers X et on note $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Exemple

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1]).$$

Étudions la convergence en probabilité de la variable $Y_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Soit $\varepsilon > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|Y_n - 1| \geqslant \varepsilon) &= \mathbb{P}(1 - Y_n \geqslant \varepsilon) \\
&= \mathbb{P}(Y_n \leqslant 1 - \varepsilon) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \leqslant 1 - \varepsilon)\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leqslant 1 - \varepsilon) \quad \text{indépendance des variables aléatoires} \\
&= (F(1-\varepsilon))^n \quad \text{où F est la fonction de répartition de la loi } \mathscr{U}([0,1]) \\
&= (1-\varepsilon)^n \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{car } 0 < 1 - \varepsilon < 1.
\end{aligned}$$

Donc la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire presque sûrement constante à 1.

Remarques

1 ▹ Une suite de variables à densité peut donc converger en probabilité vers une variable discrète.

2 ▹ Il n'y a pas unicité de la limite (si elle existe).

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé et X, X' des variables aléatoires définies sur le même espace et telles que

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X \quad \text{et} \quad X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X'$$

alors on montre que $\mathbb{P}(X \neq X') = 0$

3 ▹ Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de variables aléatoires sur un même espace probabilisé qui convergent en probabilité vers X et Y.

Alors :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \lambda X \quad \text{et} \quad X_n + Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X + Y.$$

Exercice C-142

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1]).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

1. Étudier la convergence en probabilité de la suite (Z_n).

2. Étudier la convergence en probabilité de la suite $(Y_n + Z_n)$ (où Y_n désigne le maximum des mêmes variables).

Exercice C-143

On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$X_n(\Omega) = \{0; n\},\ \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n} \text{ et } \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que la suite (X_n) converge en probabilité vers la variable certaine $X = 0$.

2. Que peut-on dire des espérances ?

Proposition XII-4

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers une variable X et si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, alors :

$$f(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} f(X).$$

Exercice C-144

Démontrer la proposition dans le cas où f est une fonction lipschitzienne.

Théorème XII-5 (Loi faible des grands nombres)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires *mutuellement indépendantes* définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soit X une variable également définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et qui admet un moment d'ordre 2.

Si les variables aléatoires X_n et X suivent la même loi alors la suite des variables aléatoires $\overline{X_n}$, moyenne arithmétique des n variables $X_1, X_2, \cdots, X_n$, converge en probabilité vers son espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$:

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X).$$

Démonstration

Remarques

1 ▹ ***Cas de la loi binomiale***

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Y_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p).$$

Il existe une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ mutuellement indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre p, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ aient la même loi. La loi faible des grands nombres donne :

$$\frac{Y_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} Z$$

où Z est une variable aléatoire certaine égale à p.

2 ▹ Considérons une expérience aléatoire et un événement A de probabilité p associé à cette expérience.

On répète n fois l'expérience de manière indépendante et on note X_n le nombre de fois où A est réalisé donc X_n suit la loi binomiale de paramètres n et p.

On note $F_n(A) = \dfrac{X_n}{n}$ la fréquence empirique d'apparition de l'événement A. D'après la loi faible des grands nombres :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(|F_n(A) - p| > \varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

autrement dit, la fréquence d'apparition $F_n(A)$ d'un événement A converge en probabilité vers sa probabilité théorique p.

Cela légitime après coup l'approche fréquentiste de la notion de probabilité : la probabilité d'un événement est la fréquence que l'on observerait si on effectuait une infinité de fois l'expérience «dans des conditions parfaitement identiques».

C - Convergence en loi

Définition XII-6

Soit X et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires. On dit que la suite (X_n) ***converge en loi*** vers X et on note $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ lorsque en tout point de continuité x de F_X, on a :

$$F_{X_n}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F_X(x).$$

Remarques

1 ▹ Ce type de convergence est faible puisque qu'il n'y a même pas unicité de la limite : si X et Y ont même loi alors $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} Y$.

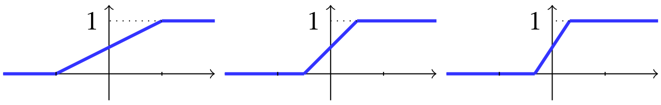
2 ▹ Toutes ces variables aléatoires ne sont pas nécessairement définies sur les mêmes espaces probabilisés.

Exemples

1 ▹ Soit (X_n) telle que $X_n \hookrightarrow \mathscr{U}\left(\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]\right)$.

Montrer que (X_n) converge en loi vers la variable certaine égale à 0.

Commençons par observer les représentations graphiques de F_{X_1}, F_{X_2} et F_{X_3} :



2 ▹ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on vérifie que la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(t) = n^2 t \exp\left(-n^2 t^2/2\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

est une densité de probabilité. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à densité où f_n est une densité de X_n. Vérifions par le calcul que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X où X est une variable presque sûrement constante à 0.

3 ▹ Soit (X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1]).$$

Étudions la convergence en loi de $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

4 ▹ Avec les mêmes notations, on note $M_n = n(1 - Y_n)$. Étudions la convergence en loi de la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Proposition XII-7

Si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable X alors, pour tous points a et b en lesquels F est continue, on a :

$$\mathbb{P}(a < X_n \leqslant b) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(a < X \leqslant b).$$

Démonstration

Proposition XII-8 (Cas particulier des variables discrètes)

Soit X et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires réelles discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On a $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$ si et seulement si : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(X = k)$.

Démonstration

Exemple

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires avec, pour tout n, $X_n \hookrightarrow \mathscr{P}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Montrons que (X_n) converge en loi vers la variable certaine égale à 0.

Remarques

1 ▹ Contrairement au cas de la convergence en probabilité, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent en loi vers X et Y alors la suite $(X_n + Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas nécessairement en loi vers $X + Y$

2 ▹ On montre (mais ce n'est pas au programme) que la convergence en probabilité implique la convergence en loi mais la réciproque est fausse.

3 ▹ Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires qui converge en loi vers une variable X.

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue alors la suite $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers la variable $f(X)$.

Proposition XII-9 (convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson)

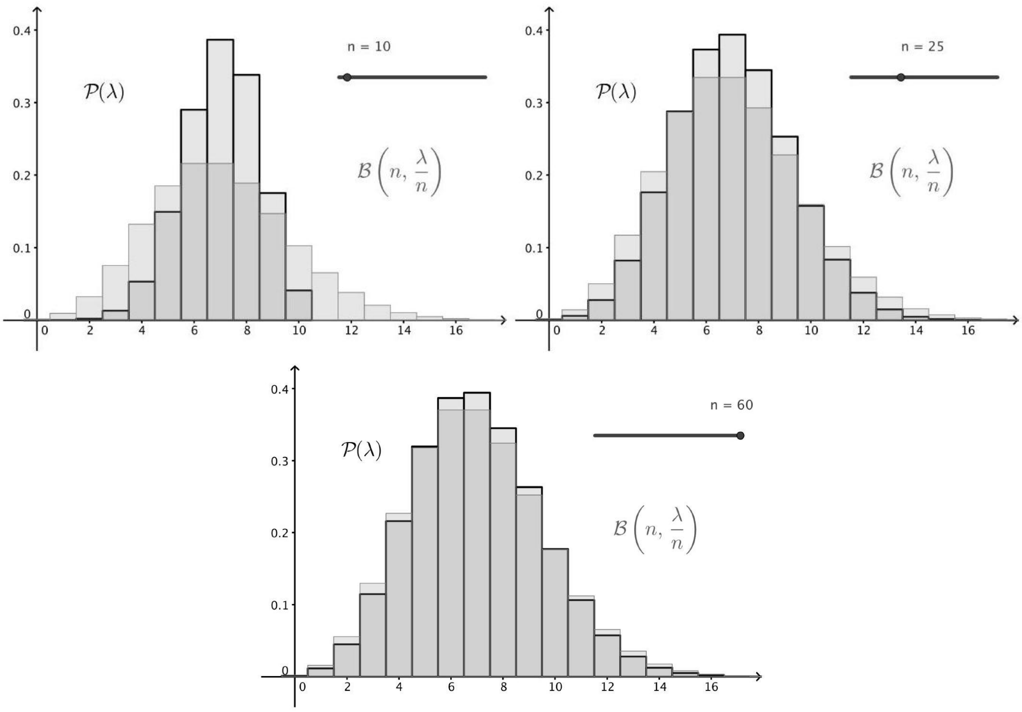
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires avec, pour tout n, $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p_n)$.

On suppose que $np_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$ avec $\lambda > 0$.

Alors (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire de loi $\mathscr{P}(\lambda)$.

Démonstration

Les diagrammes ci-dessous représentant les lois binomiales $\mathscr{B}(n; \lambda/n)$ et de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$. Plus n est grand, plus les diagrammes associés aux lois $\mathscr{P}(\lambda)$ et $\mathscr{B}(n; \lambda/n)$ sont proches.



Remarque

Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, alors pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a :

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

mais ce produit peut être délicat à évaluer numériquement lorsque n est «très grand» et p «petit» (risque d'erreurs d'arrondis par exemple). Il est donc pertinent d'avoir une expression approchée plus simple ; en posant $\lambda = np$, on a :

$$\mathbb{P}(X = k) \approx \mathbb{P}(Z = k) \quad \text{où} \quad Z \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda).$$

Dans la pratique, lorsque $n \geqslant 30$, $p \leqslant 0,1$ et $np < 15$, on peut approcher $\mathscr{B}(n,p)$ par $\mathscr{P}(np)$.

C'est ce qui explique le fait que la loi de Poisson serve à modéliser les fréquences d'apparition des événements rares.

Exemple

En moyenne un étudiant d'ECG fait une faute d'orthographe tous les 500 mots. Lors d'une rédaction de 2000 mots, quelle est la probabilité de faire plus de 5 fautes ?

On suppose l'équiprobabilité du «risque de faute» (donc avec une probabilité $p = \frac{1}{500}$) et que les fautes arrivent de manière indépendantes. Lors de la rédaction, on a une succession de 2000 expériences de Bernoulli de paramètre p mutuellement indépendantes. Si X est la variable aléatoire qui compte le nombre de fautes alors X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(2000, p)$. La probabilité recherchée est :

$$\mathbb{P}(X \geqslant 5) = 1 - \mathbb{P}(X < 5) = 1 - \sum_{k=0}^{4} \binom{2000}{k} \left(\frac{1}{500}\right)^k \left(\frac{499}{500}\right)^{2000-k}.$$

D'après ce qui précède, on peut utiliser l'approximation par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 4$:

$$\mathbb{P}(X \geqslant 5) \approx 1 - e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{4} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Comparons numériquement :

```
>>> p=1/500
>>> q = 1-p
>>> n = 2000
>>> 1-(q**n+n*p*q**(n-1)+n*(n-1)/2*p**2*q**(n-2)+n*(n-1)*(n-2)/6*p**(3)*q**(n-3)+n*(n
    -1)*(n-2)*(n-3)/24*p**4*q**(n-4))
0.371162999567369
>>> lam = 4
>>> import numpy as np
>>> 1-np.exp(-lam)*(1+lam+lam**2/2+lam**3/6+lam**4/24)
0.3711630648201266
```

D - Théorème limite central

Théorème XII-10 (théorème limite central)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On suppose que :

- les variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes ;
- les variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ont même loi et admettent une espérance m et une variance $\sigma^2 > 0$;
- on note $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ et $\overline{X}_n^* = \sqrt{n}\left(\dfrac{\overline{X_n} - m}{\sigma}\right)$.

Alors la suite $\left(\overline{X}_n{}^*\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Autrement dit, pour tous a et b vérifiant $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$, on a :

$$\mathbb{P}(a \leqslant \overline{X}_n^* \leqslant b) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(b) - \Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}t^2} \mathrm{d}t,$$

où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Corollaire XII-11 (cas de lois binomiales, théorème de Moivre-Laplace)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires suivant des lois binomiales $\mathscr{B}(n, p)$ avec $0 < p < 1$, alors :

$$X_n^* = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} Z \quad \text{avec} \quad Z \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1).$$

Autrement dit, pour tous a et b vérifiant $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$, on a :

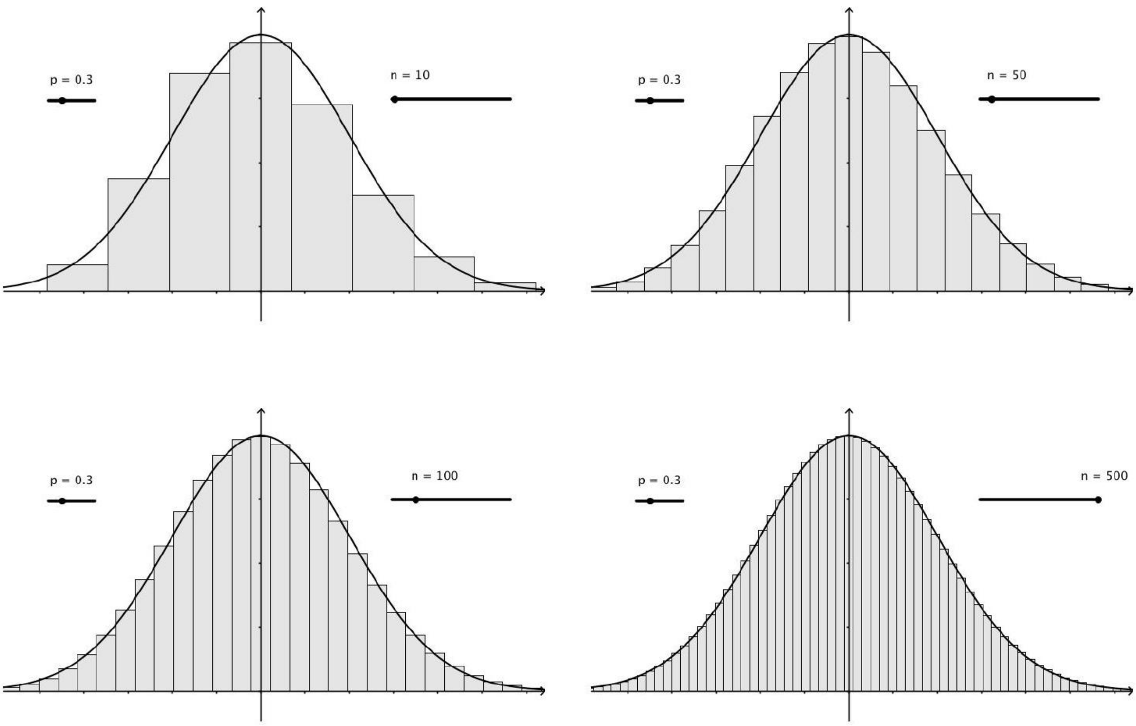
$$\mathbb{P}(a \leqslant X_n^* \leqslant b) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(b) - \Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}t^2} \mathrm{d}t.$$

Démonstration

Remarques

1 ▹ Dans la pratique, lorsque $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $nq \geqslant 5$, on approche $\mathscr{B}(n,p)$ par $\mathscr{N}(np, npq)$.

Les graphiques ci-dessous représentent les lois de ${X_n}^*$ pour différentes valeurs de n avec également la courbe représentative de la densité de loi normale centrée réduite.



2 ▹ Notons qu'il y a deux théorèmes de convergence impliquant des lois binomiales.

Dans le cas de convergence vers une loi de Poisson, np_n tend vers $\lambda > 0$ (donc p_n tend vers 0) ; dans le cas de convergence vers une loi normale, p est une probabilité fixe, strictement positive.

Exemples

1 ▹ On lance une pièce équilibrée 10000 fois et on souhaite calculer la probabilité que le nombre de «*pile*» soit compris dans l'intervalle $[4900, 5100]$.

On suppose les lancers mutuellement indépendants.

Si X est la variable aléatoire qui compte le nombre de «*pile*» alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ avec $n = 10000$ et $p = \frac{1}{2}$. L'espérance de X est $np = 5000$, l'écart type est $\sqrt{np(1-p)} = 50$.

Évaluons $\mathbb{P}(4900 \leqslant X \leqslant 5100)$. Tout d'abord, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(4900 \leqslant X \leqslant 5100) &= \mathbb{P}(np - 100 \leqslant X \leqslant np + 100)\\ &= \mathbb{P}(-100 \leqslant X - np \leqslant 100)\\ &= \mathbb{P}\left(-2 \leqslant \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant 2\right)\\ &= \mathbb{P}(-2 \leqslant X^* \leqslant 2).\end{aligned}$$

D'après le théorème, on a $\mathbb{P}(-2 \leqslant X^* \leqslant 2) \approx \mathbb{P}(-2 \leqslant Z \leqslant 2)$ avec $Z \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$ donc :

$$\mathbb{P}(-2 \leqslant X^* \leqslant 2) \approx \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1$$

or $\Phi(2) \approx 0,9772$ donc :

$$\mathbb{P}(4900 \leqslant X \leqslant 5100) \approx 0,9544.$$

2 ▹ Afin d'augmenter le nombre de personnes transportées, une compagnie aérienne vend plus de billets qu'elle n'a de places en pariant sur les absences de certains de ses passagers.

Considérons un vol d'un appareil contenant $\ell = 400$ places. On suppose que $q = 8\%$ des passagers ne pourront être à l'heure pour l'embarquement. La compagnie vend $n = 420$ billets. On cherche à calculer le risque de surbooking, c'est-à-dire la probabilité qu'il y ait strictement plus de passagers présents à l'embarquement que de places disponibles.

On pose X le nombre de personnes présentes à l'embarquement. Si l'on suppose la présence des passagers indépendante les unes des autres (c'est une hypothèse forte, il peut avoir des familles, un problème d'accès à l'aéroport), alors X suit une loi binomiale de paramètres n et p, avec $p = 1 - q = 0,92$.

On a $\mathbb{E}(X) = np = 386,4$ et $\sigma(X) = \sqrt{npq} \approx 5,56$.

Il y a surbooking lorsque l'événement $(X > \ell)$ est réalisé.

Tout d'abord, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > \ell) &= \mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) > \ell - np)\\ &= \mathbb{P}\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)} > \frac{\ell - np}{\sqrt{npq}}\right).\end{aligned}$$

Le théorème limite central s'applique et l'on a (en notant Z une variable de loi $\mathscr{N}(0,1)$) :

$$\mathbb{P}\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)} > \frac{\ell - np}{\sqrt{npq}}\right) \approx \mathbb{P}\left(Z > \frac{\ell - np}{\sqrt{npq}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\ell - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Puisque $\frac{\ell - np}{\sqrt{npq}} \approx 2,45$ et $\Phi(2,45) \approx 0,9929$, on a :

$$\mathbb{P}(X > \ell) \approx 0,0071.$$

Corollaire XII-12 (convergence des lois de Poisson)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que $X_n \hookrightarrow \mathscr{P}(n\lambda)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors la suite des variables aléatoires centrées réduites $(X_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite :

$$X_n^* = \frac{X_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} Z \text{ avec } Z \hookrightarrow \mathscr{N}(0;1).$$

Remarque

Dans la pratique, lorsque $\lambda \geqslant 18$, on approche $\mathscr{P}(\lambda)$ par $\mathscr{N}(\lambda, \lambda)$.