Consignes

- L'énoncé comporte trois exercices.
  Ces derniers peuvent être traités dans un ordre quelconque mais doivent être chacun commencés sur une nouvelle page et les questions doivent être séparées d'une ligne horizontale sur toute la largeur de la page.
- Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.
- La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- Les résultats doivent être mis en valeur et les pages doivent être numérotées.

Exercice 1

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la notation X^k désigne le polynôme $x \mapsto x^k$; en particulier les notations 1 et X^0 désignent le polynôme $x \mapsto 1$ et la notation X désigne le polynôme $x \mapsto x$.
On considère l'application f qui à un polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$ associe le polynôme :

$$f(\mathrm{P}) = \mathrm{P}'' - 4\mathrm{X}\mathrm{P}'.$$

1. Étude de f.
Soit n un entier naturel fixé uniquement dans cette question.

a. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

b. Calculer $f(1), f(\mathrm{X})$ puis $f\left(\mathrm{X}^k\right)$ pour $k \in [\![2, n]\!]$.

c. Établir alors que la matrice A_n de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ est triangulaire.

d. Prouver que f est diagonalisable et que chacun de ses espaces propres est de dimension 1.

e. Soit P un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.
Établir que : $\lambda = -4\deg(\mathrm{P})$.

f. En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire (*i.e.* de coefficient dominant valant 1) H_n de degré n tel que :

$$(\mathcal{E}_n) : f(\mathrm{H}_n) = -4n\mathrm{H}_n.$$

2. Étude de la suite $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a. En dérivant la relation $(\mathcal{E}_n)$, démontrer que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad f(\mathrm{H}_n') = -4(n-1)\mathrm{H}_n'.$$

b. En déduire que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathrm{H}_n' = n\mathrm{H}_{n-1} \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2, \quad \mathrm{H}_n - \mathrm{X}\mathrm{H}_{n-1} + \frac{(n-1)\mathrm{H}_{n-2}}{4} = 0.$$

c. Pourquoi peut-on affirmer que $\mathrm{H}_0 = 1$ et $\mathrm{H}_1 = \mathrm{X}$?

d. Calculer alors H_2 et H_3.

e. D'après ce qui précède, la suite $u_n = \mathrm{H}_n(1)$ satisfait à la relation de récurrence :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad \forall n \geqslant 2, \quad u_n = u_{n-1} - \frac{(n-1)u_{n-2}}{4}.$$

Écrire un programme en Python calculant u_{2026}.

3. *Application aux points critiques d'une fonction à trois variables.*
On note U la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\mathrm{U} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x \neq y \text{ et } y \neq z \text{ et } z \neq x\right\}$$

et on considère la fonction V définie sur U par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathrm{U}, \quad \mathrm{V}(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - \ln|x-y| - \ln|y-z| - \ln|z-x|.$$

Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in \mathrm{U}$.

a. Établir que (α,β,γ) est un point critique de V si et seulement si (α,β,γ) est solution du système :

$$(\mathcal{S}):\begin{cases} 2\alpha(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)=2\alpha-\beta-\gamma\\ 2\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)=2\beta-\alpha-\gamma\\ 2\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)=2\gamma-\alpha-\beta\end{cases}$$

b. On introduit le polynôme $\mathrm{Q}(\mathrm{X})=(\mathrm{X}-\alpha)(\mathrm{X}-\beta)(\mathrm{X}-\gamma)$.
Montrer que (α,β,γ) est solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si $\mathrm{Q}''-4\mathrm{X}\mathrm{Q}'$ admet pour racines α,β,γ.

c. Prouver que si (α,β,γ) est un point critique de V alors

$$\mathrm{Q}''-4\mathrm{X}\mathrm{Q}'=-12\mathrm{Q}$$

puis que $\mathrm{Q}=\mathrm{H}_3$.

d. Donner alors les points critiques de V.

Exercice 2

On considère un espace euclidien E pour lequel le produit scalaire de deux vecteurs x et y est noté $\langle x,y\rangle$, tandis que la norme du vecteur x est notée $\|x\|$. Le vecteur nul de E est noté 0_{E}.
On considère aussi un endomorphisme f de E, différent de l'endomorphisme nul, et antisymétrique, c'est-à-dire qu'il vérifie :

$$\forall(x,y)\in \mathrm{E}^2, \langle f(x),y\rangle=-\langle x,f(y)\rangle.$$

1. Montrer que : $\forall x\in \mathrm{E}, (f(x),x)=0$.

2. Établir l'égalité : $\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)=\mathrm{E}$.

3. On pose $s=f\circ f$. Montrer que s est un endomorphisme symétrique de E et que ses valeurs propres sont toutes dans $\mathbb{R}_-$.

4. On note g l'application qui à tout vecteur x de $\mathrm{Im}(f)$ associe $g(x)=f(x)$ et on pose $t=g\circ g$.

a. Montrer que g est un endomorphisme antisymétrique de $\mathrm{Im}(f)$.

b. En déduire que les valeurs propres de t sont toutes dans $\mathbb{R}_-^*$.

Dans les deux questions suivantes, on considère une valeur propre λ de t et on note $\mathrm{E}_\lambda(t)$ le sous-espace propre associé à cette valeur propre.

5. On considère un vecteur e_1 non nul de $\mathrm{E}_\lambda(t)$.

a. Montrer que $(e_1,g(e_1))$ est une famille d'éléments de $\mathrm{E}_\lambda(t)$ orthogonale et libre.

b. En déduire, en considérant l'orthogonal F_2 de $\mathrm{Vect}(e_1,g(e_1))$ dans $\mathrm{E}_\lambda(t)$, que la dimension de $\mathrm{E}_\lambda(t)$ est paire et qu'il existe un entier naturel p non nul, ainsi que p vecteurs $e_1,e_2,\ldots,e_p$ de $\mathrm{E}_\lambda(t)$, tels que $\left(e_1,g(e_1),e_2,g(e_2),\ldots,e_p,g\left(e_p\right)\right)$ soit une base orthogonale de $\mathrm{E}_\lambda(t)$.

6. Soit k un entier de $[\![1,p]\!]$.

a. Montrer que l'on a : $\|g(e_k)\|^2=-\lambda\|e_k\|^2$.

b. On considère les vecteurs $e_k{}'=\frac{1}{\|e_k\|}e_k$ et $e_k''=\frac{1}{\|g(e_k)\|}g(e_k)$.
Établir que $g\left(e_k'\right)=\sqrt{-\lambda}e_k''$ et $g\left(e_k''\right)=-\sqrt{-\lambda}e_k'$.

7. ***a.*** Montrer que le rang de f est pair.

b. On pose $r=\frac{1}{2}\mathrm{rg}(f)$. Déduire des questions précédentes qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E et r réels $a_1,\ldots,a_r$ strictement positifs, non nécessairement distincts, tels que la matrice M de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & & & \\ a_1 & 0 & & & & & (0) & & \\ & & 0 & -a_2 & & & (0) & & \\ & & a_2 & 0 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 0 & -a_r & & \\ & & (0) & & & a_r & 0 & & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \mathrm{M}=\begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & \\ a_1 & 0 & & & & (0) \\ & & 0 & -a_2 & & \\ & & a_2 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & (0) & & & & 0 \\ & & & & & a_r \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Si X est une variable aléatoire, on note respectivement $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ et $\mathrm{Var}(\mathrm{X})$ son espérance et sa variance, sous réserve d'existence.

Le but de ce problème (*dont on ne propose ici que les premières parties*) est de mettre en évidence quelques résultats asymptotiques liés au modèle du collectionneur de vignettes. Dans chaque paquet de céréales se trouve une vignette et il y a en tout des vignettes de n types différents, où n est un entier supérieur ou égal à 1 . Chacun des n types de vignettes se retrouve avec la même fréquence dans les paquets de céréales. Une collection est alors complète lorsqu'elle comporte n vignettes de types différents.

On modélise le nombre total de paquets de céréales qu'il est nécessaire d'acheter pour obtenir la collection complète de n vignettes de types différents par la variable aléatoire notée C_n.

On pose par convention $\mathrm{C}_0 = 0$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note C_i le nombre d'achats de paquets de céréales nécessaires pour obtenir i vignettes de types différents.

De même, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $\mathrm{X}_i = \mathrm{C}_i - \mathrm{C}_{i-1}$, qui représente le nombre d'achats supplémentaires de paquets de céréales qu'il est nécessaire d'effectuer pour obtenir une nouvelle vignette d'un type différent des $i-1$ vignettes de types différents déjà obtenues. Par convention, on pose $\mathrm{X}_1 = \mathrm{C}_1 = 1$.

On suppose que les variables aléatoires $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ sont mutuellement indépendantes. Enfin, on pose :

$$\mathrm{V}_n = \frac{\mathrm{C}_n}{n} - \ln(n).$$

1. ***a.*** Montrer que :

$$\mathrm{C}_n = \mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i.$$

b. Justifier que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire X_i suit la loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{n-i+1}{n}\right)$.

▸ Partie I

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose :

$$\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad , \quad \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Nous allons démontrer la convergence de la suite $(\mathrm{S}_n)_{n \geq 1}$ et déterminer une valeur approchée de sa limite S.

2. ***a.*** Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$, on a l'encadrement :

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

b. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

c. Montrer que la suite $(\mathrm{S}_n)_{n \geqslant 1}$ est convergente et donner un encadrement de sa limite S.

d. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a l'encadrement :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \mathrm{S} - \mathrm{S}_n \leqslant \frac{1}{n}.$$

e. En déduire un programme Python qui permette d'obtenir une valeur approchée de S à 10^{-7}-près.

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \mathrm{H}_n - \ln(n)$.

a. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a l'encadrement :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}.$$

b. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

c. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers une certaine limite $\gamma \in [0, 1]$.

4. Justifier l'existence de l'espérance de C_n et montrer que $\mathbf{E}(\mathrm{C}_n) = n\mathrm{H}_n$.

5. Justifier l'existence de la variance de C_n et exprimer $\mathrm{Var}(C_n)$ en fonction de n, S_n et H_n.

▶ **Partie II**

6. Soit $T_1, \dots, T_n$, n variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. On pose :

$$M_n = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} T_i.$$

Montrer que M_n suit la loi de densité f_n donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} n e^{-x} (1 - e^{-x})^{n-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

7. ***a.*** Soit Z une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(n+1)$ et indépendante de M_n. On note g la densité de la loi de Z qui est nulle sur $]-\infty, 0\,]$ et continue sur $]0, +\infty[$. Montrer que pour tout $x > 0$ et tout $t \in]0, x[$, on a :

$$f_n(t) g(x - t) = (n+1) e^{-(n+1)x} n e^t \left(e^t - 1\right)^{n-1}.$$

b. Soit $(Z_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes telle que pour tout entier $i \geqslant 1$, Z_i est de loi exponentielle $\mathcal{E}(i)$.
Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable aléatoire $\sum_{i=1}^n Z_i$ suit la loi de densité f_n.

8. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-x} e^{-e^{-x}}.$$

Montrer que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. La loi de densité f est appelée loi de Gumbel.

9. ***a.*** Soit $(Z_i)_{i \geq 1}$ la suite de variables aléatoires introduite précédemment. On pose $W_n = \displaystyle\sum_{i=1}^n Z_i - \ln(n)$.

Montrer que la fonction de répartition F_{W_n} de W_n est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{W_n}(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n & \text{si } x > -\ln(n) \\ 0 & \text{si } x \leq -\ln(n) \end{cases}.$$

b. Montrer que la suite de variables aléatoires $(W_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi de Gumbel.