Consignes

- L'énoncé comporte trois exercices.
  Ces derniers peuvent être traités dans un ordre quelconque mais doivent être chacun commencés sur une nouvelle page et les questions doivent être séparées d'une ligne horizontale sur toute la largeur de la page.
- Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.
- La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- Les résultats doivent être mis en valeur et les pages doivent être numérotées.

Exercice 1

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la notation X^k désigne le polynôme $x \mapsto x^k$; en particulier les notations 1 et X^0 désignent le polynôme $x \mapsto 1$ et la notation X désigne le polynôme $x \mapsto x$.
On considère l'application f qui à un polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$ associe le polynôme :

$$f(\mathrm{P}) = \mathrm{P}'' - 4\mathrm{X}\mathrm{P}'.$$

1. Étude de f.
Soit n un entier naturel fixé uniquement dans cette question.

a. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

b. Calculer $f(1), f(\mathrm{X})$ puis $f\left(\mathrm{X}^k\right)$ pour $k \in [\![2, n]\!]$.

c. Établir alors que la matrice A_n de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ est triangulaire.

d. Prouver que f est diagonalisable et que chacun de ses espaces propres est de dimension 1.

e. Soit P un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.
Établir que : $\lambda = -4\deg(\mathrm{P})$.

f. En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire (*i.e.* de coefficient dominant valant 1) H_n de degré n tel que :

$$(\mathcal{E}_n) : f(\mathrm{H}_n) = -4n\mathrm{H}_n.$$

2. Étude de la suite $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a. En dérivant la relation $(\mathcal{E}_n)$, démontrer que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad f(\mathrm{H}_n') = -4(n-1)\mathrm{H}_n'.$$

b. En déduire que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathrm{H}_n' = n\mathrm{H}_{n-1} \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2, \quad \mathrm{H}_n - \mathrm{X}\mathrm{H}_{n-1} + \frac{(n-1)\mathrm{H}_{n-2}}{4} = 0.$$

c. Pourquoi peut-on affirmer que $\mathrm{H}_0 = 1$ et $\mathrm{H}_1 = \mathrm{X}$?

d. Calculer alors H_2 et H_3.

e. D'après ce qui précède, la suite $u_n = \mathrm{H}_n(1)$ satisfait à la relation de récurrence :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad \forall n \geqslant 2, \quad u_n = u_{n-1} - \frac{(n-1)u_{n-2}}{4}.$$

Écrire un programme en Python calculant u_{2026}.

3. *Application aux points critiques d'une fonction à trois variables.*
On note U la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\mathrm{U} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x \neq y \text{ et } y \neq z \text{ et } z \neq x\right\}$$

et on considère la fonction V définie sur U par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathrm{U}, \quad \mathrm{V}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \ln|x-y| - \ln|y-z| - \ln|z-x|.$$

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathrm{U}$.

a. Établir que (α, β, γ) est un point critique de V si et seulement si (α, β, γ) est solution du système :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} 2\alpha(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta) = 2\alpha-\beta-\gamma \\ 2\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma) = 2\beta-\alpha-\gamma \\ 2\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) = 2\gamma-\alpha-\beta \end{cases}$$

b. On introduit le polynôme $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-\alpha)(\mathrm{X}-\beta)(\mathrm{X}-\gamma)$.
Montrer que (α, β, γ) est solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si $\mathrm{Q}'' - 4\mathrm{X}\mathrm{Q}'$ admet pour racines α, β, γ.

c. Prouver que si (α, β, γ) est un point critique de V alors

$$\mathrm{Q}'' - 4\mathrm{X}\mathrm{Q}' = -12\mathrm{Q}$$

puis que $\mathrm{Q} = \mathrm{H}_3$.

d. Donner alors les points critiques de V.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.
On se place dans un espace euclidien E de dimension n et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.
Le produit scalaire des vecteurs x et y de E est noté $\langle x, y\rangle$ et la norme de x est notée $\|x\|$.

► Partie 1 : définition de l'adjoint u^* d'un endomorphisme u de E.

Dans toute cette partie, u désigne un endomorphisme de E.
On se propose de montrer qu'il existe un unique endomorphisme de E, noté u^*, qui à tout vecteur y de E associe le vecteur $u^*(y)$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle.$$

1. ***a.*** Montrer que si u^* existe, alors on a, pour tout y de E :

$$u^*(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y\rangle e_i.$$

b. En déduire que si u^* existe, alors u^* est unique.

2. ***a.*** Vérifier que l'application u^* définie par l'égalité établie à la question **1*a.*** est effectivement un endomorphisme de E.

b. Conclure que cette application est solution du problème posé, c'est-à-dire que c'est l'unique endomorphisme de E, appelé adjoint de u, vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

► Partie 2 : étude des endomorphismes normaux.

On dit que u est un endomorphisme normal quand on a l'égalité :

$$u \circ u^* = u^* \circ u.$$

3. Soit f un endomorphisme symétrique de E. Donner son adjoint et vérifier que f est normal.

Dans la suite, u désigne un endomorphisme normal.

4. ***a.*** Montrer que : $\forall x \in \mathrm{E}, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

b. En déduire que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^*)$.

5. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $\mathrm{F}^\perp$ est stable par u^*.

6. On suppose que u possède une valeur propre λ et on note E_λ le sous espace propre associé.

a. Montrer que E_λ est stable par u^*.

b. Établir que $(u^*)^* = u$ puis en déduire que $\mathrm{E}_\lambda^\perp$ est stable par u.

Exercice 3

Dans ce problème, on considère un réel μ et un réel strictement positif a, et on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction :

$$F_{\mu,a} : x \longmapsto \exp\left(-\exp\left(\frac{\mu - x}{a}\right)\right).$$

1. Soit a et μ deux réels tels que $a > 0$.

a. Justifier que $F_{\mu,a}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée notée $f_{\mu,a}$ et sa dérivée seconde $f'_{\mu,a}$.

b. En déduire les variations et la convexité de $F_{\mu,a}$ sur $\mathbb{R}$. On précisera les limites de $F_{\mu,a}$ en $+\infty$ et $-\infty$. Donner l'allure de la courbe de $F_{\mu,a}$ en y faisant figurer le point d'inflexion.

c. Montrer que $F_{\mu,a}$ est une fonction bijective de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I à déterminer. On note G la réciproque de $F_{0,1}$. Expliciter G.

2. Soit a et μ deux réels tels que $a > 0$.
Montrer que $f_{\mu,a}$ est une densité, et que $F_{\mu,a}$ est la fonction de répartition associée.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et on suppose que toutes les variables aléatoires introduites dans la suite du problème sont définies sur cet espace probabilisé.
Soit μ et a des réels tels que $a > 0$. On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit la loi de Gumbel de paramètre (μ, a), ce que l'on note $X \hookrightarrow \mathscr{G}(\mu, a)$, si elle admet $f_{\mu,a}$ comme densité.

3. Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$.
Soit μ un réel et a un réel strictement positif.
Montrer que la variable aléatoire $X = aZ + \mu$ est une variable aléatoire à densité qui suit la loi de Gumbel de paramètre (μ, a).

On admet que réciproquement, si X suit la loi de Gumbel de paramètre (μ, a), alors $Z = \frac{X-\mu}{a}$ suit la loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$.

4. *a.* Soit U une variable aléatoire à densité qui suit la loi uniforme sur $]0, 1[$.
Montrer que la variable aléatoire $Y = -\ln(-\ln(U))$ suit la loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$.

b. Écrire une fonction Python `gumbel(mu,a)` renvoyant une réalisation d'une variable aléatoire de loi $\mathscr{G}(\mu, a)$.

5. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Gumbel de paramètre (μ, a) et $Z = \frac{X-\mu}{a}$.

a. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(u) e^{-u}\, du$ converge.

b. À l'aide du changement de variable $t = e^{-u}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(-\ln(t)) dt$ converge.

On notera dans la suite :

$$\gamma = -\int_0^1 \ln(-\ln(t)) dt.$$

c. Montrer que Z admet une espérance et que $\mathbb{E}(Z) = \gamma$.
On pourra utiliser le changement de variable $u = \exp(-\exp(-x))$.

d. En déduire que X admet une espérance et déterminer $\mathbb{E}(X)$ en fonction de γ, μ et a.

On admet que X admet un moment d'ordre 4 et en particulier que la variance de X notée σ^2 est égale à $a^2 c$ où c est un réel strictement positif indépendant de a et de μ.

6. Soit Y et Z deux variables aléatoires indépendantes, de même loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$.

a. Montrer que $-Z$ est une variable aléatoire à densité, et déterminer une densité g de $-Z$.

b. Montrer que pour tout réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} u e^{-(e^{-x}+1)u}\, du$ converge et déterminer sa valeur.

c. À l'aide du changement de variable $u = e^t$, en déduire que pour tout réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t) g(t) dt$ converge.

d. Montrer que $Y - Z$ est une variable aléatoire à densité, de densité la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \longmapsto \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}.$$