Notions abordées et objectifs

- Algèbre linéaire.
  - Tout le programme.
- Algèbre bilinéaire.
  - Tout le programme... avec en particulier :
  - Endomorphismes symétriques, interprétation matricielle en base orthonormée.
  - Réduction des endomorphismes symétriques, des matrices symétriques.
  - Projection orthogonale, problèmes de minimisation.

► Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :

1. Soit f et g deux endomorphismes symétriques de E.
Montrer que f et g commutent si et seulement si $f \circ g$ est symétrique.

2. Soit p un projecteur d'un espace euclidien E. Il y a équivalence entre :

i. le projecteur p est orthogonal.

ii. l'endomorphisme p est symétrique.

3. On considère l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire donné par $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^t AB)$ et on considère :

$$p : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M \mapsto p(M) = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}{}^t M.$$

Montrons que p est une projection orthogonale.

4. ***a.*** Soit E un espace euclidien, $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E, p un endomorphisme et A la matrice de p dans la base $\mathscr{B}$. Montrer que l'endomorphisme p est un projecteur orthogonal si et seulement si la matrice A est symétrique et $A^2 = A$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des $\frac{1}{n}$.
Montrer que J_n est la matrice dans la base canonique d'une projection orthogonale dont on précisera l'image.

5. Écrire la matrice dans la base canonique des applications linéaires suivantes :

a. la projection orthogonale p de $\mathbb{R}^3$ sur la droite engendrée par le vecteur $(1,1,1)$;

b. la projection orthogonale q de $\mathbb{R}^3$ sur le plan d'équation $x + y + z = 0$.

6. Déterminer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} \left(t^2 - at - b\right)^2 \mathrm{d}t$.