Notions abordées et objectifs

- Fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}^n$.
  - Notion de fonction définie sur $\mathbb{R}^n$, graphe, lignes de niveau (pour $n = 2$).
  - Notion de continuité d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Opérations sur les fonctions continues.
  - Fonctions partielles, dérivées partielles d'ordre 1 et 2, gradient en un point.
  - Notion de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.
  - Développement limité d'ordre 1 d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
  - Dérivation de $t \mapsto f(\mathbf{x} + t\mathbf{h})$ avec f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.
  - Notion d'extremum local, global, de point critique. Condition nécessaire du premier ordre.
  - Extension de la notion de continuité aux fonctions définies sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$; extension de la notion de fonction $\mathscr{C}^1$ ou $\mathscr{C}^2$ aux fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
  - Matrice hessienne en un point x, notation $\nabla^2 f(x)$.
  - Théorème de Schwarz (si une fonction est $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert alors sa matrice hessienne est symétrique en tout point de l'ouvert).
  - Fonction quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ associée à une matrice symétrique réelle A ; expression dans une base orthonormale.
  - Développement limité d'ordre 2 d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert.
  - Dérivée seconde au voisinage de 0 de la fonction $t \mapsto f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$ où f est de classe $\mathscr{C}^2$.
  - Une fonction continue sur une partie fermée bornée admet un maximum global et un minimum global.
  - Étude locale d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert en un point critique ; lien avec les valeurs propres de $\nabla^2 f(x_0)$; notion de point col.

► **Note aux colleurs :**

- Le cas d'une fonction définie sur un ouvert convexe (condition suffisante d'extremum global) et l'étude des extremums sous contrainte d'égalités linéaires n'ont pas encore été abordés.

► **Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :**

1. On munit $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique défini par $\langle M, N\rangle = {}^tMN$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.
Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On pose $\rho(A) = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$.

a. Justifier que pour tout $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \|AX\| \leqslant \rho(A)\|X\|$.

b. Établir l'équivalence entre les énoncés :

i. $\rho(A) < 1$

ii. pour tout $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $\|A^n X\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

2. On dit qu'une matrice symétrique M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul, on a ${}^tXMX > 0$. Montrer l'équivalence des quatre énoncés suivants :

i. M est définie positive ;

ii. les valeurs propres de M sont strictement positives ;

iii. il existe P orthogonale, D diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, telles que $M = PD{}^tP$;

iv. il existe une matrice R inversible et symétrique telle que $M = R^2$.

3. Montrer qu'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est un fermé.

4. Étudier les éventuels extremums de la fonction :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(x, y) = x(x+1)^2 - y^2.$$

5. Étudier les éventuels extremums de la fonction :

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 - \sum_{k=1}^n x_k.$$

6. Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$, $(a, b) \in \mathscr{U}$ un point critique de f et $H = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ la matrice hessienne de f en (a, b).
Caractériser les différents cas du théorème de cours à l'aide des réels r, s et t.

7. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f(\mathbf{x}) = \left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right).$$

a. Montrer que f_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.

b. Calculer les dérivées partielles de f d'ordre 1 et 2.

c. Montrer que f possède deux points critiques $\mathbf{a} = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}(1, 1, \ldots, 1)$ et $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$.

d. Vérifier que la hessienne de f en $\mathbf{a}$ est $H = \dfrac{-2}{\sqrt{2ne}}(nI_n + J_n)$.

e. En admettant que $\mathrm{Sp}(J_n) = \{0, n\}$, déterminer les valeurs propres de H.

f. En déduire que f possède un extremum local en $\mathbf{a}$.