TD 14 – Compléments d'algèbre bilinéaire

Exercice 14-1

Soit $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à la matrice $\mathrm{M} = \dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 10 & -1 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix}$.

Montrer que p est une projection orthogonale et déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 14-2

Écrire la matrice dans la base canonique des applications linéaires suivantes :

1. la projection orthogonale p de $\mathbb{R}^3$ sur le plan d'équation $x+y+z=0$;

2. la projection orthogonale q de $\mathbb{R}^3$ sur la droite engendrée par le vecteur $(-1,2,2)$.

Exercice 14-3

Soit p une projection d'un espace euclidien E, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i- p est une projection orthogonale ;

ii- $\forall x \in \mathrm{E},\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$;

iii- $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2,\ \big(p(x)|y\big) = \big(x|p(y)\big)$.

Exercice 14-4

Soit $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ et $\mathcal{C} = (f_1,\dots,f_n)$ deux bases orthonormales d'un espace euclidien E et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On pose $\alpha = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} \langle f_i, u(e_j)\rangle^2$.

1. Donner les coefficients de la matrice M représentant u dans la base $\mathcal{B}$

2. Comparer α et $\mathrm{Tr}({}^t\mathrm{MM})$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left\|u(e_j)\right\|^2$.

3. En déduire que α ne dépend pas des bases orthonormales choisies.

Exercice 14-5

Soit p et q les deux endomorphismes de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associés aux matrices

$$\mathrm{P} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Q} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

1. Calculer ${}^t\mathrm{P}$ et P^2. En déduire que p est un projecteur orthogonal.

2. Calculer $\mathrm{rg}(p)$. En déduire $\mathrm{Im}\, p$ et $\ker p$.

3. On suppose que $\mathrm{Q}^2 = \mathrm{Q} = {}^t\mathrm{Q}$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}^4,\ \|p(x)\|^2 + \|q(x)\|^2 \leq \|x\|^2$.
Que peut-on dire que q ? Montrer que $\mathrm{PQ} = \mathrm{QP} = 0$.

4. En déduire que $p+q$ est un projecteur orthogonal.

Exercice 14-6

Soit $n \geqslant 2$, on pose $E = \mathbb{R}_n[x]$.

1. Montrer que $\langle .,. \rangle : (P,Q) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t^2)P(t)Q(t)\,dt$ est un produit scalaire sur E.

On considère désormais ce produit scalaire sur E.

2. Par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, construire une base orthonormale $\mathcal{B} = (Q_0, Q_1, Q_2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$ échelonnée en degrés.

3. Calculer les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, puis dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$, du projeté orthogonal de $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}_2[x]$.

4. On considère $f : (a,b,c) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t^2)(t^3 - at^2 - bt - c)^2\,dt$.

Montrer que la fonction f admet un minimum et que celui-ci est atteint en un unique triplet à préciser, puis calculer ce minimum.

Exercice 14-7

Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 e^{-t}\,dt$.

Exercice 14-8

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base d'un espace euclidien E.

1. Montrer que l'endomorphisme $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k$ est symétrique à valeurs propres strictement positives.

2. Montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique g de E tel que $g^2 = f^{-1}$.

3. Montrer que la famille $(g(e_1), \ldots, g(e_n))$ est une base orthonormale de E.

Exercice 14-9

Soit $n \geqslant 3$. On note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1 sauf le coefficient en position (n,n) qui vaut 0 .

1. Justifier que A est diagonalisable.

2. Vérifier que A est semblable à une matrice diagonale de la forme $D = \mathrm{diag}(0, \ldots, 0, a, b)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

3. En calculant de deux manières la trace de A et celle de A^2, déterminer a et b.

Exercice 14-10

On munit $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique défini par $\langle M, N\rangle = {}^tMN$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.
Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On pose $\rho(A) = \displaystyle\max_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$.

1. Justifier que pour tout $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \|AX\| \leqslant \rho(A)\|X\|$.

2. Établir l'équivalence entre les énoncés :

  i. $\rho(A) < 1$

  ii. pour tout $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \quad \|A^n X\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Exercice 14-11

On dit qu'une matrice symétrique M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul, on a ${}^tXMX > 0$. Montrer l'équivalence des quatre énoncés suivants :

i. M est définie positive ;

ii. les valeurs propres de M sont strictement positives ;

iii. il existe P orthogonale, D diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, telles que $M = PD{}^tP$;

iv. il existe une matrice R inversible et symétrique telle que $M = R^2$.