TD 15 – Algèbre bilinéaire

Problème 1 - EDHEC 2025

Soit E un espace euclidien.
Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E est noté $\langle x, y\rangle$ et la norme de x est notée $\|x\|$.
On rappelle le résultat de cours suivant : si p est un projecteur de E, alors p est un projecteur orthogonal de E si et seulement si c'est un endomorphisme symétrique de E.
Dans la suite de l'exercice, les sous-espaces vectoriels considérés de E seront non triviaux (différents de E et ne contenant pas uniquement le vecteur nul).

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E et p la projection orthogonale sur F.

- ***a.*** Montrer l'inclusion suivante :
$$F \subset \{x \in E,\ \|p(x)\| = \|x\|\}.$$
- ***b.*** Montrer que pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2$.
- ***c.*** En déduire que :
$$F = \{x \in E,\ \|p(x)\| = \|x\|\}$$
et que pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Dans la suite de l'exercice, on considère F_1, F_2 et F_3 trois sous-espaces vectoriels de E et pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note p_i la projection orthogonale sur F_i.

2. On suppose dans cette question que $p_1 \circ p_2 = p_3$.

- ***a.*** Montrer que $F_1 \cap F_2 \subset F_3$.
- ***b.*** Soit x un vecteur de F_3. En utilisant la question **1.*c.***, montrer que :
$$\|x\| \leqslant \|p_2(x)\|.$$
En déduire que x appartient à F_2 puis montrer que x appartient à F_1.
- ***c.*** Qu'en déduit-on pour les sous-espaces vectoriels $F_1 \cap F_2$ et F_3 ?
- ***d.*** Justifier que pour tout $(x, y) \in E^2$,
$$\langle p_3(x), y\rangle = \langle x, p_3(y)\rangle,$$
et en déduire l'égalité suivante :
$$\langle p_1 \circ p_2(x), y\rangle = \langle p_2 \circ p_1(x), y\rangle.$$
- ***e.*** Montrer alors que $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$.

3. On suppose dans cette question que $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$ et on pose $p = p_1 \circ p_2$.

- ***a.*** Montrer que p est un projecteur de E.
- ***b.*** Montrer que p est un endomorphisme symétrique de E.
- ***c.*** En déduire que $p_1 \circ p_2$ est une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel à préciser.

4. Énoncer précisément le résultat démontré dans les questions **2** et **3**.

Problème 2 - EDHEC 2024

Dans cet exercice, E est un espace euclidien tel que $\dim E \geqslant 2$ et p désigne un entier naturel non nul et strictement inférieur à $\dim E$.
Le produit scalaire des vecteurs a et b de E est noté $\langle a, b\rangle$ et la norme du vecteur a est notée $\|a\|$.
On considère p réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tous différents de 0, ainsi qu'une famille orthonormale $\left(u_1, \ldots, u_p\right)$ de p vecteurs de E, et enfin on pose $U = \mathrm{Vect}\left(u_1, \ldots, u_p\right)$.
On se propose d'étudier l'application f qui, à tout vecteur x de E, associe :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x\rangle u_i$$

Partie 1 : étude de f

1. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.

2. Caractériser f lorsque $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont tous égaux à 1.

On revient au cas général pour toute la suite.

3. ***a.*** Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et préciser sa dimension en fonction de $\dim E$ et p.
b. En déduire le rang de f puis déterminer $\mathrm{Im}(f)$.

4. Montrer que les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont valeurs propres de f et donner un vecteur propre associé à chacune d'entre elles.

Partie 2 : convergence d'une suite de vecteurs de E

5. On dit qu'une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E converge vers le vecteur y de E lorsque

$$\lim_{n\to+\infty} \left\|y_n - y\right\| = 0$$

Montrer que le vecteur y est unique.

On pose $K = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2}$ et on suppose que K est strictement inférieur à 1.

6. Calculer $\|f(x)\|^2$ pour tout x de E et en déduire que l'on a $\|f(x)\| \leqslant K\|x\|$.

7. On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E définie par la donnée du vecteur x_0 et par la relation $x_{n+1} = f(x_n)$, valable pour tout entier naturel n.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $\|x_n\| \leqslant K^n \|x_0\|$.
b. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Vers quel vecteur ?
c. Donner la nature de la série $\sum_n \|x_n\|$.