TD 16 – Calcul différentiel

Problème 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. On identifie dans la suite les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et les matrices de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit S une matrice symétrique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$\mathrm{R_S} : \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\} \longrightarrow \mathbb{R}, \mathbf{x} \longmapsto \frac{\langle \mathrm{S}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|^2}.$$

1. ***a.*** Justifier que la restriction de $\mathrm{R_S}$ à $\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|\mathbf{x}\| = 1\}$ admet un minimum et un maximum.

b. En remarquant que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, $\mathrm{R_S}(\mathbf{x}) = \mathrm{R_S}(\alpha\mathbf{x})$, montrer que l'application $\mathrm{R_S}$ admet un minimum et un maximum global sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

2. On note $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{D}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$ et $\mathrm{N}(\mathbf{x}) = \langle \mathrm{S}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$.

a. Vérifier que D et N sont de classe $\mathscr{C}^1$ avec

$$\partial_1 \mathrm{D}(\mathbf{x}) = 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle \qquad \text{et} \qquad \partial_1 \mathrm{N}(\mathbf{x}) = 2\langle \mathrm{S}\mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle.$$

b. En déduire que $\mathrm{R_S}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et que le gradient en $\mathbf{x}$ est donné par :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}, \qquad \nabla \mathrm{R_S}(\mathbf{x}) = \frac{2}{\|\mathbf{x}\|^2}\Big(\mathrm{S}\mathbf{x} - \mathrm{R_S}(\mathbf{x})\mathbf{x}\Big).$$

c. Soit $\mathbf{x}_0$ un point où le maximum de $\mathrm{R_S}$ est atteint. Montrer que $\mathbf{x}_0$ est un vecteur propre de S.

Problème 2 - EDHEC 2018 (épreuve annulée)

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments valent 1.

1. ***a.*** Déterminer le rang de J_n. En déduire que 0 est valeur propre de J_n et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

b. Vérifier que le vecteur V_n élément de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, dont toutes les composantes sont égales à 1, est vecteur propre de J_n.

c. À l'aide des questions précédentes, donner les valeurs propres de J_n.

Dans toute la suite, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f_n(\mathbf{x}) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right).$$

2. Montrer que f_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.

3. ***a.*** Montrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a : $\partial_i f_n(\mathbf{x}) = \left(1 - 2x_i \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \exp\left(-\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)$.

b. En déduire que f_n possède deux points critiques $\mathbf{a} = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}(1, 1, \ldots, 1)$ et $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$.

4. ***a.*** Déterminer les dérivées partielles d'ordre 2 de f_n.

b. Vérifier que la hessienne de f_n en $\mathbf{a}$ est $\mathrm{H}_n(\mathbf{a}) = \dfrac{-2}{\sqrt{2ne}}(n\mathrm{I}_n + \mathrm{J}_n)$.

c. À l'aide de la première question, donner les valeurs propres de $\mathrm{H}_n(\mathbf{a})$.

d. En déduire que f_n possède un extremum local en $\mathbf{a}$.

e. Sans refaire tous les calculs, donner une conclusion concernant le point critique $\mathbf{b}$.

5. ***a.*** Étudier la fonction h qui, à tout t de $\mathbb{R}_+$, associe $h(t) = t\mathrm{e}^{-t^2}$.

b. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux vecteurs bien choisis de $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique, montrer que :

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

c. Déduire des deux questions précédentes que f_n admet en $\mathbf{a}$ et en $\mathbf{b}$ des extremums globaux.

Problème 3 - EDHEC 2010

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère la fonction f_n définie, pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de l'ouvert $\mathscr{U} =]0, +\infty[^n$, par :

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)$$

1. Montrer que f_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

2. Montrer que f_n possède une infinité de points de critiques $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et les déterminer.

3. ***a.*** Déterminer les dérivées partielles secondes de f_n.

b. Vérifier que la hessienne H_n de f_n en un point critique quelconque de f_n est proportionnelle à la matrice $\mathrm{K}_n = n\mathrm{I}_n - \mathrm{J}_n$, où I_n désigne la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments valent 1.

4. ***a.*** Déterminer le rang de J_n. En déduire que 0 est valeur propre de J_n et déterminer la dimension du sous-espace propre de J_n.

b. À l'aide des questions précédentes, donner les valeurs propres de J_n puis celles de K_n.

c. Montrer que l'on ne peut pas, de cette façon, conclure à l'existence d'un extremum local de f_n sur $\mathscr{U}$.

5. Étude du cas $n = 2$.

a. Comparer les réels $(x_1 + x_2)^2$ et $4x_1x_2$.

b. En déduire que f_2 admet sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ un minimum global et donner sa valeur.

6. *Étude du cas général.*

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux vecteurs bien choisis de $\mathbb{R}^n$, montrer que f_n admet un minimum global sur $\mathscr{U}$, égal à n^2.