Exercice 1 - Ecricome ECE 2017

Dans tout l'exercice, a désigne un réel strictement positif.

Partie A

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\varphi(x) = \ln(x) - ax^{2a}$.

1. Déterminer les limites de φ en 0 et $+\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction φ et dresser son tableau de variations.

On fera apparaître dans ce tableau le réel $x_0 = \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$.

3. Démontrer que si $a < \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions z_1 et z_2, vérifiant : $z_1 < x_0 < z_2$.

Que se passe-t-il si $a = \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$? Si $a > \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$?

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'ouvert $\mathscr{U} = (\mathbb{R}_+^*)^2$ par : $f(x,y) = \ln(x)\ln(y) - (xy)^a$.

4. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{U}$.

5. Démontrer que $(x,y) \in \mathscr{U}$ est un point critique de f si et seulement si : $x = y$ et $\varphi(x) = 0$.

6. Démontrer que si $a < \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$, la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2), où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie A.

Déterminer aussi les éventuels points critiques de f dans les cas où $a = \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$ et $a > \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$.

Partie C

Dans cette partie, on suppose que $a < \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$. On rappelle alors que la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2), où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie A.

7. Calculer la matrice hessienne de f au point (z_1, z_1) et vérifier qu'elle peut s'écrire sous la forme :

$$\nabla^2(f)(z_1, z_1) = \begin{pmatrix} -a^2 {z_1}^{2a-2} & \dfrac{1}{{z_1}^2} - a^2 {z_1}^{2a-2} \\ \dfrac{1}{{z_1}^2} - a^2 {z_1}^{2a-2} & -a^2 {z_1}^{2a-2} \end{pmatrix}.$$

8. On pose $M = \nabla^2(f)(z_1, z_1)$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer MX_1 et MX_2, et en déduire les valeurs propres de M.

9. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_1, z_1) ? Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?

10. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_2, z_2) ? Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?

Exercice 2

On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire canonique $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ où $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$.
On rappelle qu'une partie $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$ est *convexe* si :

$$\forall (x,y) \in \mathscr{U}^2, \forall \lambda \in [0,1], \lambda x + (1-\lambda) y \in \mathscr{U}.$$

De même une fonction f définie sur $\mathscr{U}$ est convexe si :

$$\forall (x,y) \in \mathscr{U}^2, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Dans tout l'exercice, $\mathscr{U}$ est un ouvert convexe non vide de $\mathbb{R}^2$ et f une application de $\mathscr{U}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$.

1. Soit $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ dans $\mathscr{U}$ et $\varphi_{x,y}$ définie sur $[0,1]$ par : $\varphi_{x,y}(t) = f(x + t(y - x))$.
Montrer que $\varphi_{x,y}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et montrer que $\varphi'_{x,y}(t) = \langle \nabla f(x + t(y - x)), y - x\rangle$ pour tout $t \in [0,1]$.

2. On suppose que f est convexe sur $\mathscr{U}$.
   a. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathscr{U}^2$, $\varphi_{x,y}$ est convexe. En déduire que la fonction $\varphi'_{x,y}$ est croissante.
   b. En déduire que :
$$\forall (x, y) \in \mathscr{U}^2,\ f(y) - f(x) \geqslant \langle \nabla f(x), y - x\rangle \qquad (1).$$
   c. Réciproquement on suppose que f vérifie la relation (1) ci-dessus. Montrer que f est convexe.

3. Soit f convexe sur $\mathscr{U}$.
   a. Montrer que si f présente en $x_0 \in \mathscr{U}$ un minimum relatif, alors f présente en x_0 un minimum global.
   b. Montrer que si l'ensemble des points où f admet un minimum est non vide, alors cet ensemble est une partie convexe de $\mathscr{U}$.

Exercice 3

Soit $\mathrm{J} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$.

1. Soit $\alpha > 0$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   i. $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ \langle \nabla \mathrm{J}(u) - \nabla \mathrm{J}(v), u - v\rangle \geqslant \alpha \|u - v\|^2$;
   ii. $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ \mathrm{J}(u) \geqslant \mathrm{J}(v) + \dfrac{\alpha}{2}\|u - v\|^2 + \langle \nabla \mathrm{J}(v), u - v\rangle$;
   iii. $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ \langle \nabla^2 \mathrm{J}(u) v, v\rangle \geqslant \alpha \|v\|^2$.

2. On suppose que J vérifie les conditions de la question précédente et on considère un convexe fermé K de $\mathbb{R}^n$, on note J_K la restriction de J à K.
   a. Montrer que $\inf\limits_{u \in \mathrm{K}} \mathrm{J}_\mathrm{K}(u)$ existe et que cette borne inférieure est atteinte.
   b. Montrer que $u_0 \in \mathrm{K}$ réalise le minimum de J_K sur K si et seulement si : $\forall u \in \mathrm{K},\ \langle \nabla \mathrm{J}_\mathrm{K}(u_0), u - u_0\rangle \geqslant 0$.