Notions abordées et objectifs

- Probabilités.
  - Révision de tout le programme déjà vu !
- Convergence en probabilité.
  - Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev. Loi faible des grands nombres.
  - Notion de convergence en probabilité ; somme, composition par une fonction continue.
- Convergence en loi.
  - Notion de convergence en loi.
  - Cas particulier des variables discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
  - Composition par une fonction continue.
  - Théorème limite central.
  - Approximations de la loi binomiale et de la loi de Poisson par la loi normale centrée réduite.

► **Note aux colleurs :**

- Il faudrait que les exercices abordent (au moins sur la fin) les notions nouvelles de ce programme.

► **Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :**

1. ***a.*** Énoncer les inégralités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.
   b. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.
   Montrer que : $\mathbb{P}(X \geqslant \lambda^2) \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$ et $\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$.
2. Énoncer et démontrer la loi faible des grands nombres ; application (énoncé et démonstration) à la loi binomiale.
3. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1]).$$
   On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad Z_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n).$$
   Étudier la convergence en probabilité des suites (Y_n), (Z_n) et $(Y_n + Z_n)$.
4. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1]).$$
   On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $M_n = n(1 - Y_n)$.
   Étudier la convergence en loi des suites $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
5. On considère un réel $a > 0$ et, pour tout entier $n > a$, une variable aléatoire X_n suivant la loi géométrique de paramètre $\frac{a}{n}$.
   Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires définies par $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$.
6. En utilisant le théorème central limite, montrer que :
$$e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$
7. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
   a. Soit Z une variable aléatoire discrète admettant une espérance nulle et une variance notée σ^2.
   Montrer que pour tout $a \in]0, +\infty[$ et tout $x \in [0, +\infty[$, on a :
$$\mathbb{P}(Z \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2 + x^2}{(a+x)^2}.$$
   b. On fixe $a > 0$. Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sigma^2 + x^2}{(a+x)^2}$.
   c. Montrer que pour tout $a \in]0, +\infty[$, on a : $\mathbb{P}(\mathbb{Z} \geqslant a) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$.
   d. En déduire :$\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda + 1}$.
8. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
   On pose pour tout réel t : $G_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) t^k$.
   a. Justifier l'existence de $G_X(t)$, pour tout réel t, et montrer que $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.
   b. Montrer que pour $t \in [1, +\infty[$ et tout $a \in]0, +\infty[$, on a :
$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{G_X(t)}{t^a}.$$
   c. Étudier les variations de la fonction :
$$g : [1, +\infty[\to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{e^{t-1}}{t^2}.$$
   d. En déduire :
$$\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \left(\frac{e}{4}\right)^{\lambda}.$$