TD 18 – Convergence et approximation

Exercice 18-1 (d'après oral ESCP)

On considère un réel $a > 0$ et, pour tout entier $n > a$, une variable aléatoire X_n suivant la loi géométrique de paramètre $\frac{a}{n}$.
Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires définies par $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$.

Exercice 18-2

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$Y_n = X_n + X_{n+1} \quad \text{et} \quad S_n = \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}.$$

1. Étudier l'indépendance des variables aléatoires Y_n.

2. Calculer l'espérance et la variance de S_n.

3. Démontrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a :

$$\mathbb{P}(|S_n - 2p| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Exercice 18-3

En considérant une suite de variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la loi de Poisson de paramètre 1, montrer en utilisant le théorème central limite que :

$$e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

Exercice 18-4 (d'après EDHEC 2004)

Dans tout l'exercice, X est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Le but de l'exercice est d'obtenir diverses majorations de la probabilité $\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda)$.

1. Montrer que : $\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$.

2. Soit Z une variable aléatoire discrète admettant une espérance nulle et une variance notée σ^2.
Montrer que pour tout $a \in]0,+\infty[$ et tout $x \in [0,+\infty[$, on a :

$$\mathbb{P}(Z \geqslant a) \leqslant \mathbb{P}\Big((Z+x)^2 \geqslant (a+x)^2\Big).$$

3. En utilisant l'inégalité de Markov, montrer que pour tout $a \in]0,+\infty[$ et tout $x \in [0,+\infty[$, on a :

$$\mathbb{P}(Z \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2 + x^2}{(a+x)^2}.$$

4. On fixe $a > 0$. Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sigma^2 + x^2}{(a+x)^2}$.

5. Montrer que pour tout $a \in]0,+\infty[$, on a : $\mathbb{P}(\mathbb{Z} \geqslant a) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$.

6. Déduire de ce qui précède, l'inégalité : $\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda + 1}$.

Pour obtenir une autre amélioration de l'inégalité initiale, on pose pour tout réel t : $G_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X = k)t^k$.

7. Justifier l'existence de $G_X(t)$, pour tout réel t.
8. Montrer que, pour tout réel t, on a : $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.
9. Montrer que pour $t \in [1, +\infty[$ et tout $a \in]0, +\infty[$, on a :

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{G_X(t)}{t^a}.$$

10. Étudier les variations de la fonction :

$$g : [1, +\infty[\to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{e^{t-1}}{t^2}.$$

11. En déduire :

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \left(\frac{e}{4}\right)^{\lambda}.$$

12. Montrer que cette dernière amélioration est meilleure que celle obtenue à la question **6.** lorsque λ prend des valeurs assez grandes.

Exercice 18-5 (d'après oral ESCP 2017)

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note D_n le diamètre d'un tronc d'arbre à la fin de l'année numéro n et l'on suppose que sa croissance suit le modèle ci-dessous :

- ▹ le diamètre initial D_0 est tel que $D_0 > 0$;
- ▹ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_{n+1} = D_n + X_{n+1} D_n$ où X_{n+1} est une variable aléatoire représentant les divers facteurs extérieurs (maladies, climat, etc.) ;
- ▹ on suppose que les variables aléatoires X_k sont à densité, de même loi à valeurs dans $[0, 1]$ et de densité f ;
- ▹ on suppose que les variables aléatoires X_k sont indépendantes.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n = \left(\dfrac{D_n}{D_0}\right)^{1/n}$ et $m = \mathbb{E}\Big(\ln(1 + X_1)\Big)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer D_n en fonction de D_0 et de $X_1, \ldots, X_n$.
2. ***a.*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{E}(Q_n)$ en fonction de $\mathbb{E}\Big((1 + X_1)^{1/n}\Big)$.
   b. Montrer l'existence d'une constante $C > 0$ telle que, pour tout $y \in [0, 1]$, $\left|e^y - 1 - y\right| \leqslant Cy^2$.
   c. En déduire que $\mathbb{E}(Q_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^m$.
3. ***a.*** Montrer l'existence d'une constante $L > 0$ telle que, pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$, $|e^x - e^y| \leqslant L\left|x - y\right|$.
   b. Soit $\varepsilon > 0$. Prouver l'existence d'une constante $M > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}\left(|Q_n - e^m| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{M}{n}.$$

   c. Que peut-on en déduire pour la suite $(Q_n)_{n \geqslant 1}$?

Exercice 18-6 (d'après EDHEC 2009)

On admet l'unicité presque sûrement d'une limite en probabilité : si $(T_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers T et vers T′ alors $\mathbb{P}(T = T) = 1$.
On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires *converge en moyenne* vers une variable aléatoire U lorsque, pour tout entier naturel n, la variable aléatoire $|U_n - U|$ admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(|U_n - U|) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

1. Dans cette question, on suppose que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on considère une variable alétoire X elle aussi définie sur cet espace probabilisé.
   Montrer que si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en moyenne vers X alors $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers X.

On se propose, dans la suite de l'exercice, d'étudier un exemple montrant que la réciproque de cette propriété est fausse.
Pour ce faire, on considère une suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ de variable aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, et suivant toutes la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 1$.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose : $Y_n = Z_1 Z_2 \cdots Z_n$.

2. Déterminer $\mathbb{P}(Y_n \neq 0)$.
3. Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.
4. Montrer que si la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ convergeait en moyenne vers une variable aléatoire Y alors on aurait $\mathbb{P}(Y = 0) = 1$.
5. Comparer $\mathbb{E}(|Y_n - Y|)$ et $\mathbb{E}(Y_n)$ puis conclure.

Exercice 18-7 (d'après EDHEC 2021)

1. On considère une variable aléatoire Z suivant la loi normale centrée réduite. On pose $Y = e^Z$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité. On note F_Y la fonction de répartition de Y et Φ celle de Z.
   a. Déterminer $F_Y(x)$ pour tout réel x négatif ou nul, puis exprimer $F_Y(x)$ à l'aide de la fonction Φ pour tout réel x strictement positif.
   b. En déduire qu'une densité f_Y de Y est donnée par :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{(\ln x)^2}{2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

   Dans la suite, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, toutes définies sur le même espace probabilisé, mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi, dite de Rademacher de paramètre p (avec $0 < p < 1$), et définie par :

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p$$

   On considère de plus, pour n dans $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $T_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} X_k$.

2. ***a.*** Donner l'espérance et la variance communes aux variables X_n.
   b. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par T_n puis calculer $\mathbb{E}(T_n)$ et en déduire une relation entre $\mathbb{P}(T_n = 1)$ et $\mathbb{P}(T_n = -1)$.
   c. Écrire une autre relation vérifiée par $\mathbb{P}(T_n = 1)$ et $\mathbb{P}(T_n = -1)$, puis en déduire la loi de T_n.
   d. Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable T dont on précisera la loi.
3. Soit T′ une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que les variables X_n.
   a. Établir l'inclusion suivante :

$$\left(\left|T_{n+1} - T'\right| < \frac{1}{2}\right) \cap \left(\left|T_n - T'\right| < \frac{1}{2}\right) \subset (|T_{n+1} - T_n| < 1)$$

   b. En déduire l'inégalité :

$$\mathbb{P}(|T_{n+1} - T_n| \geqslant 1) \leqslant \mathbb{P}\left(\left|T_{n+1} - T'\right| \geqslant \frac{1}{2}\right) + \mathbb{P}\left(\left|T_n - T'\right| \geqslant \frac{1}{2}\right)$$

c. Montrer, en observant les valeurs que peut prendre la variable $T_{n+1} - T_n$, que :

$$\mathbb{P}\left(|T_{n+1} - T_n| \geqslant 1\right) = 1 - p$$

d. La suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle en probabilité ?

4. Dans cette question on prend $p = \dfrac{1}{2}$.

On considère, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $U_n = e^{n\overline{X}_n}$.

a. On rappelle que $\overline{X}_n^*$ est la variable aléatoire centrée réduite associée à $\overline{X}_n$. Exprimer $\overline{X}_n^*$ en fonction de $\overline{X}_n$.

b. Utiliser le théorème limite central pour établir que la suite $\left(U_n^{1/\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de même loi que Y.