

**Exercice 1 – d'après Ecricome 2010**

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $\mathbb{R}_n[x]$  l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus  $n$ .  
Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la notation  $X^k$  désigne le polynôme  $x \mapsto x^k$ ; en particulier les notations  $1$  et  $X^0$  désignent le polynôme  $x \mapsto 1$  et la notation  $X$  désigne le polynôme  $x \mapsto x$ .

On considère l'application  $f$  qui à un polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_n[x]$  associe le polynôme :

$$f(P) = P'' - 4XP'.$$

**1. Étude de  $f$ .**

Soit  $n$  un entier naturel fixé uniquement dans cette question.

**a.** Justifier que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[x]$ .

**b.** Calculer  $f(1)$ ,  $f(X)$  puis  $f(X^k)$  pour  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ .

**c.** Établir alors que la matrice  $A_n$  de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[x]$  est triangulaire.

**d.** Prouver que  $f$  est diagonalisable et que chacun de ses espaces propres est de dimension 1.

**e.** Soit  $P$  un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

Établir que :  $\lambda = -4\deg(P)$ .

**f.** En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire (i.e. de coefficient dominant valant 1)  $H_n$  de degré  $n$  tel que :

$$(\mathcal{E}_n) : f(H_n) = -4nH_n.$$

**2. Étude de la suite  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .**

**a.** En dérivant la relation  $(\mathcal{E}_n)$ , démontrer que :

$$\forall n \geq 1, \quad f(H'_n) = -4(n-1)H'_n.$$

**b.** En déduire que :

$$\forall n \geq 1, \quad H'_n = nH_{n-1} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \quad H_n - XH_{n-1} + \frac{(n-1)H_{n-2}}{4} = 0.$$

**c.** Pourquoi peut-on affirmer que  $H_0 = 1$  et  $H_1 = X$ ?

**d.** Calculer alors  $H_2$  et  $H_3$ .

**e.** D'après ce qui précède, la suite  $u_n = H_n(1)$  satisfait à la relation de récurrence :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad \forall n \geq 2, \quad u_n = u_{n-1} - \frac{(n-1)u_{n-2}}{4}.$$

Écrire un programme en Python calculant  $u_{2026}$ .

**3. Application aux points critiques d'une fonction à trois variables.**

On note  $U$  la partie de  $\mathbb{R}^3$  définie par :

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x \neq y \text{ et } y \neq z \text{ et } z \neq x\}$$

et on considère la fonction  $V$  définie sur  $U$  par :

$$\forall (x, y, z) \in U, \quad V(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \ln|x-y| - \ln|y-z| - \ln|z-x|.$$

Soit  $(\alpha, \beta, \gamma) \in U$ .

a. Établir que  $(\alpha, \beta, \gamma)$  est un point critique de  $V$  si et seulement si  $(\alpha, \beta, \gamma)$  est solution du système :

$$(S) : \begin{cases} 2\alpha(\alpha - \gamma)(\alpha - \beta) = 2\alpha - \beta - \gamma \\ 2\beta(\beta - \alpha)(\beta - \gamma) = 2\beta - \alpha - \gamma \\ 2\gamma(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) = 2\gamma - \alpha - \beta \end{cases}$$

b. On introduit le polynôme  $Q(X) = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$ .

Montrer que  $(\alpha, \beta, \gamma)$  est solution de  $(S)$  si et seulement si  $Q'' - 4XQ'$  admet pour racines  $\alpha, \beta, \gamma$ .

c. Prouver que si  $(\alpha, \beta, \gamma)$  est un point critique de  $V$  alors

$$Q'' - 4XQ' = -12Q$$

puis que  $Q = H_3$ .

d. Donner alors les points critiques de  $V$ .

ÉLÉMENTS DE CORRECTION (D'APRÈS J.F. COSSUTTA) —  
Dans tout l'exercice nous écrirons  $f_n$  à la place de  $f$ .

1. a. Soit  $P$  un élément de  $\mathbb{R}_n[x]$ .

Puisque  $P$  est de degré au plus  $n$ ,  $P'$  est de degré au plus  $n - 1$  et  $P''$  est de degré au plus  $n - 2$ .

Donc  $P''$  et  $XP'$  sont de degré au plus  $n$  et finalement  $f_n(P)$  est un élément de  $\mathbb{R}_n[x]$  comme combinaison linéaire de deux éléments de  $\mathbb{R}_n[x]$ .

Soit  $P$  et  $Q$  deux éléments de  $\mathbb{R}_n[x]$  et soit  $\lambda$  un réel alors :

$$\begin{aligned} f_n(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)'' - 4X(\lambda P + Q)' \\ &= \lambda P'' + Q'' - 4X(\lambda P' + Q') \\ &= \lambda(P'' - 4XP') + (Q'' - 4XQ') \\ &= \lambda f_n(P) + f_n(Q) \end{aligned}$$

donc  $f_n$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[x]$ .

b.  $f_n(1) = 0_{\mathbb{R}_n[x]} - 4X \times 0_{\mathbb{R}_n[x]} = 0_{\mathbb{R}_n[x]}$

$$f_n(X) = 0_{\mathbb{R}_n[x]} - 4X \times 1 = -4X$$

Soit  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned} f_n(X^k) &= k(k-1)X^{k-2} - 4X(kX^{k-1}) \\ &= -4kX^k + k(k-1)X^{k-2}. \end{aligned}$$

c. Pour tout  $k$  dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $f_n(X^k)$  est combinaison linéaire d'éléments de la famille  $(1, X, \dots, X^k)$  donc la matrice  $A_n$  de  $f_n$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[x]$  est triangulaire supérieure.

d. Puisque  $A_n$  est triangulaire, son spectre est l'ensemble de ses éléments diagonaux :

$$\text{Sp } f_n = \text{Sp } A_n = \{-4k; k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}.$$

La suite  $(-4k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  étant strictement décroissante donc  $f_n$  possède  $n + 1$  valeurs propres deux à deux distinctes or il s'agit d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension  $n + 1$  donc  $f_n$  est diagonalisable et les sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

e. Soit  $P$  un vecteur propre de  $f_n$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . Soit  $r$  son degré et  $a_r$  le coefficient de son terme de plus haut degré, on a  $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $a_r \neq 0$ .

Puisque  $f_n(P) = \lambda P$  i.e.  $P'' - 4XP' = \lambda P$ , le coefficient de  $X^r$  dans  $P'' - 4XP'$  est  $-4(ra_r)$  et le coefficient de  $X^r$  dans  $\lambda P$  est  $\lambda a_r$ .

Donc  $-4(ra_r) = \lambda a_r$ . Or  $a_r$  n'est pas nul donc

$$\lambda = -4r = -4 \deg P.$$

f.  $\diamond$  Existence de  $H_n$ .

Puisque  $-4n$  est une valeur propre de  $f_n$ , il existe un vecteur propre  $P_n$  de  $f_n$  associé à la valeur propre  $-4n$ . D'après ce qui précède  $\deg P_n = n$ ; on note  $a_n$  le coefficient de  $X^n$  dans  $P_n$  et on pose  $H_n = \frac{1}{a_n} P_n$ .

Par construction  $H_n$  est un polynôme unitaire. De plus, le degré de  $H_n$  est celui de  $P_n$  donc  $n$ .

Comme  $H_n = \frac{1}{a_n} P_n$  et que  $P_n$  est un vecteur propre de  $f_n$  associé à la valeur propre  $-4n$ , il est de même pour  $H_n$ .

$\diamond$  Unicité de  $H_n$ .

Supposons que  $Q_n$  soit également un polynôme unitaire de degré  $n$  tel que  $f_n(Q_n) = -4nQ_n$ .

Alors  $Q_n$  et  $H_n$  sont deux éléments non nuls du sous-espace propre de  $f_n$  associé à la valeur propre  $-4n$  qui est de dimension 1.

Donc il existe un réel  $\alpha$  non nul tel que  $Q_n = \alpha H_n$ .

Comme  $Q_n$  et  $H_n$  sont unitaires et de degré  $n$ , on a  $\alpha = 1$ .

Donc  $Q_n = H_n$  et l'on a l'unicité de  $H_n$ .

2. a. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$f_n(H_n) = -4nH_n \text{ i.e. } H_n'' - 4XH_n' = -4nH_n.$$

En dérivant, il vient :

$$H_n''' - 4H_n' - 4XH_n'' = -4nH_n'$$

soit :

$$H_n''' - 4XH_n'' = -4(n-1)H_n'.$$

Ainsi :

$$(H_n')'' - 4X(H_n')' = -4(n-1)H_n'.$$

Comme  $H_n'$  appartient à  $\mathbb{R}_n[x]$  :

$$f_n(H_n') = -4(n-1)H_n'.$$

- b. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $H_n$  est unitaire et de degré  $n$  donc  $T_n = \frac{1}{n}H'_n$  est un polynôme unitaire de degré  $n-1$  donc :

$$f_n(T_n) = \frac{1}{n}f_n(H'_n) = \frac{1}{n}(-4(n-1)H'_n) = -4(n-1)T'_n.$$

Donc  $T_n$  est un polynôme unitaire de degré  $n-1$  tel que

$$T''_n - 4XT'_n = -4(n-1)T_n$$

et par l'unicité définissant  $H_{n-1}$  (question 1.d) on a  $T_n = H_{n-1}$  donc :

$$H'_n = nH_{n-1}.$$

Soit  $n \geq 2$ , on a :

$$H'_n = nH_{n-1} \text{ et } H'_{n-1} = (n-1)H_{n-2}$$

donc :

$$H''_n = nH'_{n-1} = n(n-1)H_{n-2}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} -4nH_n &= H''_n - 4XH'_n \\ &= n(n-1)H_{n-2} - 4X(nH_{n-1}) \\ &= n(n-1)H_{n-2} - 4X(nH_{n-1}) \end{aligned}$$

puis :

$$H_n = -\frac{n-1}{4}H_{n-2} + XH_{n-1}$$

i.e.

$$H_n - XH_{n-1} + \frac{n-1}{4}H_{n-2} = 0_{\mathbb{R}_n[x]}.$$

- c. Puisque 1 est un polynôme unitaire de degré 0 qui vérifie  $(1)'' - 4X(1)' = -(4 \times 0)1$ , on a  $1 = H_0$ .

De même  $X$  est un polynôme unitaire de degré 1 qui vérifie  $(X)'' - 4X(X)' = -(4 \times 1)1$  donc  $X = H_1$ .

- d. On a :

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{R}_2[X]} &= H_2 - XH_1 + \frac{2-1}{4}H_0 \\ &= H_2 - X^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

donc :

$$H_2 = X^2 - \frac{1}{4}.$$

On a :

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{R}_3[X]} &= H_3 - XH_2 + \frac{3-1}{4}H_1 \\ &= H_3 - X\left(X^2 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}X \\ &= H_3 - X^3 + \frac{3}{4}X \end{aligned}$$

donc :

$$H_3 = X^3 - \frac{3}{4}X.$$

- e. Une première possibilité :

```
u0, u1 = 1, 1
for n in range(2, 2027):
    u[n] = u[n-1] - (n-1)/4*u[n-2]
```

alors  $u1$  correspond à la valeur demandée.

Une autre possibilité :

```
u = [0 for n in range(2027)]
u[0] = 1
u[1] = 1
for n in range(2, 2027):
    u[n] = u[n-1] - (n-1)/4*u[n-2]
```

alors  $u[2026]$  correspond à la valeur demandée.

Cependant dans les deux cas, la valeur numérique ne peut pas être obtenue avec la précision usuelle des calculs en Python.

3. a.  $\diamond$  Montrons que  $V$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ .

Les fonctions polynômes :

$$(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 \text{ et } (x, y, z) \mapsto x - y$$

sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ .

La seconde ne s'annule pas sur  $U$  et  $t \mapsto \ln|t|$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  donc, par composition :

$$(x, y, z) \mapsto \ln|x - y|$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ .

De même pour les fonctions :

$$(x, y, z) \mapsto \ln|y - z| \text{ et } (x, y, z) \mapsto \ln|z - x|.$$

Donc  $V$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  comme combinaison linéaire de quatre fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ .

$\diamond$  Pour tout  $(x, y, z) \in U$  :

$$\begin{aligned} \partial_1 V(x, y, z) &= 2x - \frac{1}{x-y} - \frac{(-1)}{z-x} \\ &= 2x - \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-z} \\ &= \frac{2x(x-y)(x-z) - (x-z) - (x-y)}{(x-y)(x-z)} \\ \partial_2 V(x, y, z) &= \frac{2y(y-x)(y-z) - (2y-x-z)}{(y-x)(y-z)} \\ \partial_3 V(x, y, z) &= \frac{2z(z-x)(z-y) - (2z-x-y)}{(z-x)(z-y)} \end{aligned}$$

Soit  $(\alpha, \beta, \gamma)$  un élément de  $U$ .

Le fait que  $\nabla V(\alpha, \beta, \gamma) = 0_{\mathbb{R}^3}$  équivaut successivement aux systèmes qui suivent :

$$\begin{cases} \frac{2\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma) - (2\alpha-\beta-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} = 0 \\ \frac{2\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma) - (2\beta-\alpha-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} = 0 \\ \frac{2\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) - (2\gamma-\alpha-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma) - (2\alpha-\beta-\gamma) = 0 \\ 2\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma) - (2\beta-\alpha-\gamma) = 0 \\ 2\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) - (2\gamma-\alpha-\beta) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma) = 2\alpha-\beta-\gamma \\ 2\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma) = 2\beta-\alpha-\gamma \\ 2\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) = 2\gamma-\alpha-\beta \end{cases}$$

b.  $Q = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$  donc :

$$\begin{aligned} Q' &= (X - \beta)(X - \gamma) + (X - \alpha)(X - \gamma) + (X - \alpha)(X - \beta) \\ Q'' &= (X - \gamma) + (X - \beta) + (X - \gamma) \\ &\quad + (X - \alpha) + (X - \beta) + (X - \alpha) \\ &= 2(3X - (\alpha + \beta + \gamma)). \end{aligned}$$

Soit  $(\alpha, \beta, \gamma)$  un élément de  $U$  :

$$\begin{aligned} Q''(\alpha) - 4\alpha Q'(\alpha) &= 2(3\alpha - (\alpha + \beta + \gamma)) \\ &\quad - 4\alpha((\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) + 0 + 0) \\ &= 2((2\alpha - \beta - \gamma) - 2\alpha(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)) \end{aligned}$$

donc  $Q''(\alpha) - 4\alpha Q'(\alpha) = 0$  lorsque :

$$2\alpha(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) = 2\alpha - \beta - \gamma.$$

De même pour  $\beta$  et  $\gamma$ .

Donc  $(\alpha, \beta, \gamma)$  est solution de  $(\mathcal{S})$  si et seulement si  $Q'' - 4XQ'$  admet pour racines  $\alpha, \beta, \gamma$ .

c. Soit  $(\alpha, \beta, \gamma)$  un point critique de  $V$  alors c'est un élément de  $U$  et  $\alpha, \beta, \gamma$  sont distincts deux à deux.

Posons  $Q = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$  alors  $\alpha, \beta, \gamma$  sont alors trois racines distinctes de  $Q'' - 4XQ'$ .

Ainsi  $Q$  divise  $Q'' - 4XQ'$  donc il existe  $T$  dans  $\mathbb{R}[x]$  tel que  $Q'' - 4XQ' = TQ$ .

Puisque  $Q$  est de degré 3,  $Q'' - 4XQ'$  est de degré 3.

Donc  $T$  est un polynôme constant.

Finalement il existe un réel  $c$  tel que  $Q'' - 4XQ' = cQ$ .

Le coefficient de  $X^3$  dans  $Q$  est  $c$  et c'est  $-4 \times 3$  dans  $Q'' - 4XQ'$ . Ainsi  $c = -12$  donc :

$$Q'' - 4XQ' = -12Q.$$

Puisque  $Q$  est un polynôme unitaire de degré 3 qui vérifie

$$Q'' - 4XQ' = -4(3)Q,$$

il résulte de 1.d que  $Q = H_3$ .

d. Si  $(\alpha, \beta, \gamma)$  est un point critique de  $V$ , alors  $H_3 = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$ .

Puisque  $H_3 = X^3 - \frac{3}{4}X$ , les points critiques de  $V$  sont parmi :  $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ,  $\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ,  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ,  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ,  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$  et  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ .

Réciproquement, on vérifie aisément que si  $(\alpha, \beta, \gamma)$  est l'un des triplets alors c'est une solution de  $(\mathcal{S})$  donc un point critique de  $V$ .

## Exercice 2 - d'après EDHEC ECS 2021

On considère un espace euclidien  $E$  pour lequel le produit scalaire de deux vecteurs  $x$  et  $y$  est noté  $\langle x, y \rangle$ , tandis que la norme du vecteur  $x$  est notée  $\|x\|$ . Le vecteur nul de  $E$  est noté  $0_E$ .

On considère aussi un endomorphisme  $f$  de  $E$ , différent de l'endomorphisme nul, et antisymétrique, c'est-à-dire qu'il vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle.$$

1. Montrer que :  $\forall x \in E, \langle f(x), x \rangle = 0$ .
2. Établir l'égalité :  $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$ .
3. On pose  $s = f \circ f$ . Montrer que  $s$  est un endomorphisme symétrique de  $E$  et que ses valeurs propres sont toutes dans  $\mathbb{R}_-$ .
4. On note  $g$  l'application qui à tout vecteur  $x$  de  $\text{Im}(f)$  associe  $g(x) = f(x)$  et on pose  $t = g \circ g$ .
  - a. Montrer que  $g$  est un endomorphisme antisymétrique de  $\text{Im}(f)$ .
  - b. En déduire que les valeurs propres de  $t$  sont toutes dans  $\mathbb{R}_-$ .

Dans les deux questions suivantes, on considère une valeur propre  $\lambda$  de  $t$  et on note  $E_\lambda(t)$  le sous-espace propre associé à cette valeur propre.

5. On considère un vecteur  $e_1$  non nul de  $E_\lambda(t)$ .
  - a. Montrer que  $(e_1, g(e_1))$  est une famille d'éléments de  $E_\lambda(t)$  orthogonale et libre.
  - b. En déduire, en considérant l'orthogonal  $F_2$  de  $\text{Vect}(e_1, g(e_1))$  dans  $E_\lambda(t)$ , que la dimension de  $E_\lambda(t)$  est paire et qu'il existe un entier naturel  $p$  non nul, ainsi que  $p$  vecteurs  $e_1, e_2, \dots, e_p$  de  $E_\lambda(t)$ , tels que  $(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2), \dots, e_p, g(e_p))$  soit une base orthogonale de  $E_\lambda(t)$ .
6. Soit  $k$  un entier de  $\llbracket 1, p \rrbracket$ .
  - a. Montrer que l'on a :  $\|g(e_k)\|^2 = -\lambda \|e_k\|^2$ .
  - b. On considère les vecteurs  $e'_k = \frac{1}{\|e_k\|} e_k$  et  $e''_k = \frac{1}{\|g(e_k)\|} g(e_k)$ .  
Établir que  $g(e'_k) = \sqrt{-\lambda} e''_k$  et  $g(e''_k) = -\sqrt{-\lambda} e'_k$ .
7. a. Montrer que le rang de  $f$  est pair.
  - b. On pose  $r = \frac{1}{2} \text{rg}(f)$ . Déduire des questions précédentes qu'il existe une base orthonormale  $\mathcal{B}$  de  $E$  et  $r$  réels  $a_1, \dots, a_r$  strictement positifs, non nécessairement distincts, tels que la matrice  $M$  de  $f$  dans  $\mathcal{B}$  soit :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & \\ a_1 & 0 & & & & \\ & & 0 & -a_2 & & \\ & & a_2 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & -a_r \\ & & & & & a_r & 0 \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & \\ a_1 & 0 & & & & \\ & & 0 & -a_2 & & \\ & & a_2 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & -a_r \\ & & & & & a_r & 0 \end{pmatrix}.$$

### ÉLÉMENTS DE CORRECTION —

1. Pour tout  $x \in E$  on a, par antisymétrie de  $f$  :

$$\langle f(x), x \rangle = -\langle x, f(x) \rangle$$

Or, par symétrie du produit scalaire :

$$\langle x, f(x) \rangle = \langle f(x), x \rangle.$$

On a donc :

$$\langle f(x), x \rangle = -\langle f(x), x \rangle$$

donc  $\langle f(x), x \rangle = 0$ .

2. Par théorème du rang on sait déjà que :

$$\dim \ker f + \dim \text{Im } f = \dim E.$$

Soit  $x \in \ker f \cap \text{Im } f$ . Puisque  $x \in \text{Im } f$  donc il existe un vecteur  $y \in E$  tel que  $x = f(y)$ . On a alors :

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \langle x, f(y) \rangle = -\langle f(x), y \rangle = -\langle 0_E, y \rangle = 0.$$

On a donc  $\|x\| = 0$  donc :  $x = 0_E$ . Cela prouve que :

$$\ker f \cap \text{Im } f = \{0_E\}$$

Donc  $\ker f$  et  $\operatorname{Im} f$  sont supplémentaires dans  $E$  :

$$\ker f \oplus \operatorname{Im} f = E$$

3. Tout d'abord  $s$  est un endomorphisme de  $E$  en tant que composée de deux endomorphismes de  $E$ .

Soit  $x$  et  $y$  dans  $E$ . On a :

$$\begin{aligned}\langle s(x), y \rangle &= \langle f(f(x)), y \rangle \\ &\stackrel{f \text{ antisym.}}{=} -\langle f(x), f(y) \rangle \\ &\stackrel{f \text{ antisym.}}{=} -(-\langle x, f(f(y)) \rangle) \\ &= \langle x, s(y) \rangle\end{aligned}$$

donc  $s$  est un endomorphisme symétrique de  $E$ .

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $s$  et  $x$  un vecteur propre associé (donc non nul). On a d'une part :

$$\langle s(x), x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda \|x\|^2$$

et d'autre part :

$$\langle s(x), x \rangle = \langle f(f(x)), x \rangle \stackrel{f \text{ antisym.}}{=} -\langle f(x), f(x) \rangle = -\|f(x)\|^2$$

Comme  $x \neq 0_E$  on a :  $\|x\|^2 \neq 0$ . On en déduit que :

$$\lambda \|x\|^2 = -\|f(x)\|^2 \quad \text{donc} \quad \lambda = \underbrace{\frac{-1}{\|x\|^2}}_{<0} \times \underbrace{\|f(x)\|^2}_{\geq 0}$$

donc  $\lambda \leq 0$ .

Donc les valeurs propres de  $s$  sont dans  $\mathbb{R}_-$ .

4. a. Puisque  $g$  est la restriction de  $f$  à  $\operatorname{Im} f$ , c'est une application linéaire.

De plus, pour tout  $x \in \operatorname{Im} f$ ,  $g(x) = f(x)$  donc on a  $g(x) \in \operatorname{Im} f$ .

Donc  $g$  est un endomorphisme de  $\operatorname{Im} f$ .

Enfin, pour tous  $x$  et  $y$  de  $\operatorname{Im} f$  on a :

$$\langle g(x), y \rangle = \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle = -\langle x, g(y) \rangle$$

Donc  $g$  est antisymétrique.

- b. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $t$  et  $x \in \operatorname{Im} f$  un vecteur propre associé. Avec le même raisonnement qu'à la question 3 on obtient :

$$\lambda = \frac{-1}{\|x\|^2} \times \|g(x)\|^2 = \frac{-1}{\|x\|^2} \times \|f(x)\|^2$$

De plus, on sait que  $x \in \operatorname{Im} f \setminus \{0_E\}$ . Or :  $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$ . On a donc :  $x \notin \ker f$  de sorte que  $f(x) \neq 0_E$ . On en déduit :

$$\lambda = \underbrace{\frac{-1}{\|x\|^2}}_{<0} \times \underbrace{\|f(x)\|^2}_{>0} \quad \text{donc} \quad \lambda < 0.$$

Donc les valeurs propres de  $s$  sont toutes dans  $\mathbb{R}_-$ .

5. D'après l'énoncé  $e_1 \neq 0_E$  et  $t(e_1) = \lambda e_1$ .

a. Il s'agit de montrer que :

- 1)  $e_1$  et  $g(e_1)$  sont dans  $E_\lambda(t)$
- 2)  $\langle e_1, g(e_1) \rangle = 0$

3) la famille  $(e_1, g(e_1))$  est libre.

Par définition,  $e_1 \in E_\lambda(t)$ . De plus :

$$\begin{aligned}t(g(e_1)) &= g \circ g(g(e_1)) \\ &= g(g(g(e_1))) \\ &= g(t(e_1)) \\ &= g(\lambda e_1) \\ &= \lambda g(e_1)\end{aligned}$$

donc  $g(e_1) \in E_\lambda(t)$ .

Montrons maintenant 2). On a :

$$\langle e_1, g(e_1) \rangle = \langle e_1, f(e_1) \rangle \stackrel{\text{par 1.}}{=} 0$$

La famille  $(e_1, g(e_1))$  est donc orthogonale. Pour montrer que 3) elle est libre, il suffit de prouver qu'elle ne contient pas le vecteur nul. D'après l'énoncé  $e_1$  n'est pas le vecteur nul (c'est un vecteur propre). De plus  $e_1 \in \operatorname{Im} f \setminus \{0_E\}$  et  $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$ . On a donc :  $g(e_1) = f(e_1) \neq 0_E$ . Bilan :

$(e_1, g(e_1))$  est une famille orthogonale et libre de  $E_\lambda(t)$

- b. On va maintenant construire une base orthogonale de  $E_\lambda(t)$  et montrer que cet espace vectoriel est de dimension paire. On a vu que  $(e_1, g(e_1))$  est une famille orthogonale libre de  $E_\lambda(t)$ . On distingue alors deux cas :

**Cas 1 : si  $\operatorname{Vect}(e_1, g(e_1)) = E_\lambda(t)$ .** Dans ce cas,  $(e_1, g(e_1))$  est une base orthogonale de  $E_\lambda(t)$ .

**Cas 2 : sinon.** On note  $F_2$  le supplémentaire orthogonal de  $\operatorname{Vect}(e_1, g(e_1))$  dans  $E_\lambda(t)$ .  $F_2$  n'est pas réduit à  $\{0_E\}$  donc il existe un vecteur non-nul  $e_2 \in F_2$ . Montrons alors que

$(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2))$  est une famille orthogonale libre de  $E_\lambda(t)$

On peut appliquer *mutatis mutandis* le même raisonnement que plus haut à l'exception de l'orthogonalité qui mérite un examen minutieux. On a déjà montré que :  $\langle e_1, g(e_1) \rangle = 0$ . De manière analogue :  $\langle e_2, g(e_2) \rangle = 0$ . Comme  $e_2$  est dans l'orthogonal de  $\operatorname{Vect}(e_1, g(e_1))$  on obtient aussi :

$$\langle e_2, e_1 \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle e_2, g(e_1) \rangle = 0$$

Il reste à prouver que  $\langle g(e_2), e_1 \rangle = 0$  et  $\langle g(e_2), g(e_1) \rangle = 0$ . Comme  $g$  est antisymétrique (4.a) on a :

$$\langle g(e_2), e_1 \rangle = -\underbrace{\langle e_2, g(e_1) \rangle}_0 = 0$$

Enfin :

$$\begin{aligned}\langle g(e_2), g(e_1) \rangle &= -\langle e_2, g(g(e_1)) \rangle \\ &= -\langle e_2, t(e_1) \rangle \\ &= -\langle e_2, \lambda e_1 \rangle \\ &= -\lambda \underbrace{\langle e_2, e_1 \rangle}_0 = 0\end{aligned}$$

donc  $(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2))$  est une famille orthogonale de  $E_\lambda(t)$

De plus elle est libre car les vecteurs sont non-nuls (comme en 5.a). On distingue alors deux sous-cas :

**Cas 2.1 : si**  $\text{Vect}(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2)) = E_\lambda(t)$ . Dans ce cas,  $(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2))$  est une base orthogonale de  $E_\lambda(t)$ .

**Cas 2.2 : sinon.** On note  $F_3$  le supplémentaire orthogonal de  $\text{Vect}(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2))$  dans  $E_\lambda(t)$ .  $F_3$  contient un vecteur non-nul  $e_3$ . De même que précédemment, on montre que

$(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2), e_3, g(e_3))$  est une famille orthogonale de  $E_\lambda(t)$

et ainsi de suite ...

À chaque étape, on ajoute deux vecteurs à la famille libre. Ce processus s'arrête nécessairement puisqu'une famille libre contient au plus  $\dim E_\lambda(t)$  vecteurs. En notant  $p$  le rang de la dernière étape, on a ainsi construit

une base orthogonale  $(e_1, g(e_1), \dots, e_p, g(e_p))$  de  $E_\lambda(t)$

On a alors :

$$\dim E_\lambda(t) = \text{Card}(e_1, g(e_1), \dots, e_p, g(e_p)) = 2p$$

et donc  $E_\lambda(t)$  est bien de dimension paire

6. a. On a déjà établi cette égalité à la question 4.b. On a donc :  $\|g(e_k)\| = \sqrt{-\lambda} \times \|e_k\|$

b. On a :

$$g(e'_k) = g\left(\frac{1}{\|e_k\|} e_k\right) = \frac{1}{\|e_k\|} g(e_k) = \frac{\sqrt{-\lambda}}{\|g(e_k)\|} g(e_k) = \sqrt{-\lambda} e''_k$$

De plus :

$$\begin{aligned} g(e''_k) &= \frac{1}{\|g(e_k)\|} g(g(e_k)) \\ &= \frac{1}{\|g(e_k)\|} t(e_k) \\ &= \frac{1}{\|g(e_k)\|} \lambda e_k \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\lambda} \|e_k\|} \lambda e_k \\ &= \frac{-\sqrt{-\lambda}}{\|e_k\|} e_k \\ &= -\sqrt{-\lambda} e'_k \end{aligned}$$

donc

$$g(e'_k) = \sqrt{-\lambda} e''_k \quad \text{et} \quad g(e''_k) = -\sqrt{-\lambda} e'_k$$

7. a. Comme  $t$  est un endomorphisme symétrique de  $\text{Im } f$ , il est diagonalisable. On a donc :

$$\dim \text{Im } f = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(t)} \dim E_\lambda(t).$$

D'après la question 5.b, les  $E_\lambda(t)$  sont tous de dimension paire. Enfin, par définition  $\text{rg}(f) = \dim \text{Im } f$ .

Donc  $\text{rg}(f)$  est pair.

b. Soit  $\lambda \in \text{Sp}(t)$ . En reprenant les notations des questions 5.b et 6.b, la famille  $(e'_1, e''_1, \dots, e'_p, e''_p)$  est une base orthonormale de  $E_\lambda(t)$  (on a normalisé la base orthogonale de la question 5.b). De plus, les sous-espaces propres  $E_\lambda(t)$  sont supplémentaires orthogonaux dans  $\text{Im } f$ , car  $t$  est un endomorphisme symétrique de  $\text{Im } f$ . En concaténant les bases orthonormales de ces sous-espaces propres, on obtient alors une base orthonormale de  $\text{Im } f$  (donc de cardinal  $2r$ ) de la forme

$$(u'_1, u''_1, u'_2, u''_2, \dots, u'_r, u''_r).$$

De plus, pour tout  $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$ , en notant  $\lambda_i$  la valeur propre de  $t$  telle que  $u'_i \in E_{\lambda_i}(t)$  et  $a_i = \sqrt{-\lambda_i}$  on a d'après 6.b :

$$f(u'_i) = a_i u''_i \quad \text{et} \quad f(u''_i) = -a_i u'_i \quad (*)$$

Enfin,  $a_i > 0$  car  $\lambda_i < 0$  (question 4.b). On distingue alors deux cas :

• Cas 1 : si  $\ker f = \{0_E\}$ . Dans ce cas  $\text{Im } f = E$  donc  $(u'_1, u''_1, u'_2, u''_2, \dots, u'_r, u''_r)$  est une base orthonormale de  $E$ . D'après la relation (\*), la matrice  $M$  de  $f$  dans cette base s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & \\ a_1 & 0 & & & & \\ & & 0 & -a_2 & & \\ & & a_2 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & -a_r \\ & & & & & a_r & 0 \end{pmatrix}$$

• Cas 2 : si  $\ker f \neq \{0_E\}$ . Dans ce cas on note  $(v_1, \dots, v_q)$  une base orthonormale de  $\ker f$ . Comme  $E = \text{Im } f \oplus \ker f$  on sait que (concaténation des bases)  $\mathcal{B} = (u'_1, u''_1, \dots, u'_r, u''_r, v_1, \dots, v_q)$  est une base de  $E$ .

Pour tout  $i \in \llbracket 1; q \rrbracket$  on a :  $f(v_i) = 0_E$ . Donc la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & & \\ a_1 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & -a_2 & & & & \\ & & a_2 & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 0 & -a_r & \\ & & & & & a_r & 0 & \\ & & & & & & & 0 & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Il reste à prouver que la base  $\mathcal{B}$  est orthonormale. Comme on a concaténé une base orthonormale de  $\text{Im } f$  et une base orthonormale de  $\ker f$ , il suffit de prouver que les espaces vectoriels  $\text{Im } f$  et  $\ker f$  sont orthogonaux. Soit  $x \in \text{Im } f$  et  $y \in \ker f$ . Il s'agit de prouver que :  $\langle x, y \rangle = 0$ . Il existe  $z \in E$  tel que :  $x = f(y)$ . On a alors :

$$\langle x, y \rangle = \langle f(z), y \rangle = -\langle z, f(y) \rangle \stackrel{y \in \ker f}{=} -\underbrace{\langle z, 0_E \rangle}_0 = 0$$

Donc  $\mathcal{B}$  est bien une base orthonormale de  $E$

### Exercice 3 – d'après HEC Paris - ESCP BS Maths II ECS 2022

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . Si  $X$  est une variable aléatoire, on note respectivement  $\mathbb{E}(X)$  et  $\mathbb{V}(X)$  son espérance et sa variance, sous réserve d'existence.

Le but de ce problème (*dont on ne propose ici que les premières parties*) est de mettre en évidence quelques résultats asymptotiques liés au modèle du collectionneur de vignettes. Dans chaque paquet de céréales se trouve une vignette et il y a en tout des vignettes de  $n$  types différents, où  $n$  est un entier supérieur ou égal à 1. Chacun des  $n$  types de vignettes se retrouve avec la même fréquence dans les paquets de céréales. Une collection est alors complète lorsqu'elle comporte  $n$  vignettes de types différents.

On modélise le nombre total de paquets de céréales qu'il est nécessaire d'acheter pour obtenir la collection complète de  $n$  vignettes de types différents par la variable aléatoire notée  $C_n$ .

On pose par convention  $C_0 = 0$  et pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $C_i$  le nombre d'achats de paquets de céréales nécessaires pour obtenir  $i$  vignettes de types différents.

De même, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on pose  $X_i = C_i - C_{i-1}$ , qui représente le nombre d'achats supplémentaires de paquets de céréales qu'il est nécessaire d'effectuer pour obtenir une nouvelle vignette d'un type différent des  $i - 1$  vignettes de types différents déjà obtenues. Par convention, on pose  $X_1 = C_1 = 1$ .

On suppose que les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes. Enfin, on pose :

$$\mathbb{V}_n = \frac{C_n}{n} - \ln(n).$$

1. *a.* Montrer que :

$$C_n = X_1 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

*b.* Justifier que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la variable aléatoire  $X_i$  suit la loi géométrique  $\mathcal{G}\left(\frac{n-i+1}{n}\right)$ .

#### ► Partie I

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

Nous allons démontrer la convergence de la suite  $(S_n)_{n \geq 1}$  et déterminer une valeur approchée de sa limite  $S$ .

2. *a.* Montrer que pour tout entier  $k \geq 2$ , on a l'encadrement :

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

*b.* Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ , on a :

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \leq S_n \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

*c.* Montrer que la suite  $(S_n)_{n \geq 1}$  est convergente et donner un encadrement de sa limite  $S$ .

*d.* Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ , on a l'encadrement :

$$\frac{1}{n+1} \leq S - S_n \leq \frac{1}{n}.$$

*e.* En déduire un programme Python qui permette d'obtenir une valeur approchée de  $S$  à  $10^{-7}$  près.

3. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose  $u_n = H_n - \ln(n)$ .

*a.* Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ , on a l'encadrement :

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}.$$

*b.* Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :  $0 \leq u_n \leq 1$ .

*c.* Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  converge vers une certaine limite  $\gamma \in [0, 1]$ .

4. Justifier l'existence de l'espérance de  $C_n$  et montrer que  $\mathbb{E}(C_n) = nH_n$ .

5. Justifier l'existence de la variance de  $C_n$  et exprimer  $\mathbb{V}(C_n)$  en fonction de  $n, S_n$  et  $H_n$ .

## ► Partie II

6. Soit  $T_1, \dots, T_n, n$  variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi exponentielle  $\mathcal{E}(1)$ . On pose :

$$M_n = \max_{1 \leq i \leq n} T_i.$$

Montrer que  $M_n$  suit la loi de densité  $f_n$  donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} ne^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

7. **a.** Soit  $Z$  une variable aléatoire de loi exponentielle  $\mathcal{E}(n+1)$  et indépendante de  $M_n$ . On note  $g$  la densité de la loi de  $Z$  qui est nulle sur  $]-\infty, 0]$  et continue sur  $]0, +\infty[$ . Montrer que pour tout  $x > 0$  et tout  $t \in ]0, x[$ , on a :

$$f_n(t)g(x-t) = (n+1)e^{-(n+1)x}ne^t(e^t - 1)^{n-1}.$$

**b.** Soit  $(Z_i)_{i \geq 1}$  une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes telle que pour tout entier  $i \geq 1$ ,  $Z_i$  est de loi exponentielle  $\mathcal{E}(i)$ .

Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ , la variable aléatoire  $\sum_{i=1}^n Z_i$  suit la loi de densité  $f_n$ .

8. On définit la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-x}e^{-e^{-x}}.$$

Montrer que  $f$  est une densité de probabilité sur  $\mathbb{R}$ . La loi de densité  $f$  est appelée loi de Gumbel.

9. **a.** Soit  $(Z_i)_{i \geq 1}$  la suite de variables aléatoires introduite précédemment. On pose  $W_n = \sum_{i=1}^n Z_i - \ln(n)$ .

Montrer que la fonction de répartition  $F_{W_n}$  de  $W_n$  est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{W_n}(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n & \text{si } x > -\ln(n) \\ 0 & \text{si } x \leq -\ln(n) \end{cases}.$$

**b.** Montrer que la suite de variables aléatoires  $(W_n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers une variable aléatoire de loi de Gumbel.

## ÉLÉMENTS DE CORRECTION —

1. **a.** Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $X_i = C_i - C_{i-1}$ . En sommant pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on obtient une somme télescopique :

$$\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n C_i - C_{i-1} = C_n - C_0 = C_n.$$

**b.** Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la variable aléatoire  $X_i$  correspond au nombre d'achats à effectuer, lorsque l'on possède déjà  $i-1$  vignettes différentes, pour obtenir l'une des  $n-i+1$  vignettes que l'on ne possède pas encore.

À chaque achat d'un paquet de céréales, la probabilité d'obtenir l'une de ces nouvelles vignettes est  $\frac{n-i+1}{n}$ .

Par ailleurs, chaque achat d'un paquet de céréales est indépendant des achats précédents et des vignettes déjà obtenues. On reconnaît donc la loi géométrique de paramètre  $\frac{n-i+1}{n}$  :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad X_i \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{n-i+1}{n}\right).$$

2. **a.** Pour  $k \geq 2$ , on remarque que :

$$(0 <) \quad k(k-1) \leq k^2 \leq k(k+1)$$

et la fonction inverse étant décroissante sur  $]0, +\infty[$ , on obtient :

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

**b.** Soit  $n \geq 2$ . On somme les inégalités ci-dessus pour  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$  :

$$\sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right).$$

Dans les membres de gauche et de droite, on reconnaît des sommes télescopiques. Dans le membre du milieu, on reconnaît la somme définissant  $S_n$  privée de son premier terme :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \leq S_n - 1 \leq 1 - \frac{1}{n}$$

et on en déduit :

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \leq S_n \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

c. La suite  $(S_n)$  est croissante car :

$$\forall n \geq 1, \quad S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1} \geq 0$$

et elle est majorée (par 2) d'après la question précédente. Ainsi, la suite  $(S_n)$  converge.

L'encadrement déterminé pour  $S_n$  en question précédente donne :  $\frac{3}{2} \leq S \leq 2$ .

d. Il suffit ici d'utiliser les deux encadrements (celui de  $S_n$  et celui de  $S$ ) obtenus en (c) et (d) :

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \leq S_n \leq 2 - \frac{1}{n} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{n+1} - \frac{3}{2} \leq -S_n \leq \frac{1}{n} - 2$$

et

$$\frac{3}{2} \leq S \leq 2,$$

en sommant membre à membre les inégalités :

$$\frac{1}{n+1} \leq S - S_n \leq \frac{1}{n}.$$

e. Pour  $n = 10^7$ , on a  $\frac{1}{n} = 10^{-7}$  et  $\frac{1}{n+1} < 10^{-7}$ , donc le nombre  $S_{10^7}$  est, d'après la question précédente, une valeur approchée de  $S$  à  $10^{-7}$  près. Ce nombre peut être obtenu avec le code Python suivant :

```
s = 0
for i in range(1, 1e7 + 1):
    s = s + 1/i**2
print(s)
```

3. a. Soit  $k \geq 1$ . En remarquant que :

$$\forall t \in \left[ \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right], \quad \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k},$$

la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t}$  étant décroissante sur  $\left[ \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right]$ , la croissance de l'intégrale donne :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt$$

soit le résultat demandé :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}.$$

b. Soit  $n \geq 1$ . On somme les inégalités précédentes membre à membre pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^n \underbrace{\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}_{=\ln(k+1)-\ln(k)} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

On obtient une somme télescopique dans le membre du milieu :

$$H_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq H_n$$

ce qui donne :

— avec l'inégalité de gauche :

$$\forall n \geq 2, \quad u_n = H_n - \ln(n) \leq 1$$

ce qui reste vrai avec  $n = 1$  ;

— avec l'inégalité de droite :

$$\ln(n) \leq \ln(n+1) \leq H_n$$

donc

$$\forall n \geq 1, \quad u_n \geq 0.$$

c. Pour tout  $n \geq 1$  :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

La suite  $u$  est donc croissante. Elle est de plus majorée par 1. Donc la suite  $u$  converge.

Sa limite vérifie :  $0 \leq \gamma \leq 1$ .

4. Chaque variable aléatoire  $X_i$  ( $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ) suit la loi géométrique de paramètre  $\frac{n-i+1}{n}$ , donc admet une espérance égale à  $\frac{n}{n-i+1}$ .

Comme somme de variables aléatoires admettant chacune une espérance,  $C_n = X_1 + \dots + X_n$  admet une espérance. Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(C_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^n \frac{n}{n-i+1} = n \sum_{i=1}^n \frac{1}{n-i+1}.$$

Avec le changement d'indice  $j = n - i + 1$  :

$$\mathbb{E}(C_n) = n \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} = n H_n.$$

5. Chaque variable aléatoire  $X_i$  ( $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ) admet aussi une variance égale à :

$$\frac{1 - \frac{n-i+1}{n}}{\left(\frac{n-i+1}{n}\right)^2} = \frac{i-1}{n} \times \frac{n^2}{(n-i+1)^2} = n \times \frac{i-1}{(n-i+1)^2}.$$

Comme somme de variables aléatoires admettant chacune une variance,  $C_n = X_1 + \dots + X_n$  admet une variance. Par indépendance mutuelle de  $X_1, \dots, X_n$  :

$$\mathbb{V}(C_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) = n \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{(n-i+1)^2}$$

Avec le changement d'indice  $j = n - i + 1$  :

$$\mathbb{V}(C_n) = n \sum_{i=1}^n \frac{n-j}{j^2} = n^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{j^2} - n \sum_{i=1}^n \frac{1}{j}$$

c'est-à-dire :

$$\mathbb{V}(C_n) = n^2 S_n - n H_n.$$

6. Commençons par déterminer la fonction de répartition  $F_{M_n}$  de  $M_n$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$(M_n \leq x) = (T_1 \leq x) \cap \dots \cap (T_n \leq x).$$

Les variables aléatoires  $T_1, \dots, T_n$  étant mutuellement indépendantes :

$$F_{M_n}(x) = \mathbb{P}(M_n \leq x) = \mathbb{P}(T_1 \leq x) \times \dots \times \mathbb{P}(T_n \leq x)$$

et comme ces variables suivent toutes la même loi  $\mathcal{E}(1)$  :

$$F_{M_n}(x) = (F_{T_1}(x))^n = \begin{cases} (1 - e^{-x})^n & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

La fonction de répartition de  $M_n$  est clairement de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  et continue également en 0 (car  $(1 - e^{-0})^n = 0$ ), donc continue sur  $\mathbb{R}$ , ce qui prouve que  $M_n$  est une variable aléatoire à densité.

Une densité  $f_n$  de  $M_n$  est obtenue en dérivant  $F_{M_n}$  sur  $\mathbb{R}^*$  et en choisissant une valeur arbitraire en 0 (choisissons 0) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} ne^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

7. a. La fonction  $g$  est définie par :

$$g(x) = \begin{cases} (n+1)e^{-(n+1)x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Pour  $x > 0$  et  $t \in ]0, x[$ , comme  $t > 0$  et  $x - t > 0$  :

$$\begin{aligned} f_n(t)g(x-t) &= ne^{-t}(1 - e^{-t})^{n-1} \times (n+1)e^{-(n+1)(x-t)} \\ &= ne^{-t}(1 - e^{-t})^{n-1}(n+1)e^{-(n+1)x}e^{(n+1)t} \\ &= (n+1)e^{-(n+1)x}ne^t(e^t - 1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour  $x \leq 0$ , ainsi que pour  $x \geq 0$  et  $t \notin ]0, x[$  :

$$f_n(t)g(x-t) = 0$$

(l'un des deux facteurs est nul).

- b. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $Y_n = \sum_{i=1}^n Z_i$ .

On va montrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la variable aléatoire  $Y_n$  admet  $f_n$  pour densité.

- Initialisation. Pour  $n = 1$ ,  $Y_1 = Z_1$  suit la loi  $\mathcal{E}(1)$  et  $f_1$  en est bien une densité :

$$f_1(x) = \begin{cases} 1e^{-x}(1 - e^{-x})^0 = e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

- Hérédité. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $Y_n$  admette pour densité  $f_n$ .

Déterminons une densité de  $Y_{n+1}$ .

Comme  $Y_{n+1} = Y_n + Z_{n+1}$  et comme les variables aléatoires  $Y_n = Z_1 + \dots + Z_n$  et  $Z_{n+1}$  sont indépendantes (d'après le lemme des coalitions, les variables aléatoires  $Z_1, \dots, Z_n, Z_{n+1}$  étant mutuellement indépendantes), on peut utiliser le produit de convolution.

La fonction  $h$  définie ci-dessous, si elle est définie

et continue sauf peut-être en un nombre fini de points, est une densité de  $Y_{n+1}$  :

$$h(x) = \int_0^x f_n(t)g(x-t)dt.$$

Cette fonction est nulle pour  $x \leq 0$ , tout comme  $f_{n+1}(x)$ .

Pour  $x > 0$ , la question précédente donne :

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^x (n+1)e^{-(n+1)x}ne^t(e^t - 1)^{n-1}dt \\ &= (n+1)e^{-(n+1)x} \int_0^x ne^t(e^t - 1)^{n-1}dt \\ &= (n+1)e^{-(n+1)x} \left[ (e^t - 1)^n \right]_0^x \\ &= (n+1)e^{-(n+1)x} \times (e^x - 1)^n \\ &= (n+1)e^{-x} \times (e^{-x})^n (e^x - 1)^n \\ &= (n+1)e^{-x}(1 - e^{-x})^n \\ &= f_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Par conséquent,  $f_{n+1}$  est une densité de  $Y_{n+1}$ .

On a finalement prouvé par récurrence que, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , la variable aléatoire  $Z_1 + \dots + Z_n$  admet  $f_n$  pour densité.

8. Par les règles sur le produit et la composée de fonctions continues, la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$ .

Elle est de plus clairement positive.

Déterminons, si elle converge, son intégrale entre  $-\infty$  et  $+\infty$ . Pour  $A > 0$ , on reconnaît sous l'intégrale  $u'e^u$  avec  $u(x) = -e^{-x}$  :

$$\begin{aligned} \int_0^A f(x)dx &= \int_0^A e^{-x}e^{-e^{-x}}dx \\ &= \left[ e^{-e^{-x}} \right]_0^A \\ &= e^{-e^{-A}} - e^{-e^0} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1 - e^{-1} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \int_{-A}^0 f(x)dx &= \int_{-A}^0 e^{-x}e^{-e^{-x}}dx \\ &= \left[ e^{-e^{-x}} \right]_{-A}^0 \\ &= e^{-e^0} - e^{-e^{-A}} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} e^{-1} - 0. \end{aligned}$$

Donc l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  converge et vaut 1.

Donc  $f$  est une densité de probabilité.

9. a. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} F_{W_n}(x) &= \mathbb{P}(W_n \leq x) \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n Z_i - \ln(n) \leq x\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n Z_i \leq x + \ln(n)\right). \end{aligned}$$

D'après 7.(b),  $M_n$  et  $\sum_{i=1}^n Z_i$  ont la même la fonction de répartition donc :

$$\begin{aligned} F_{W_n}(x) &= F_{M_n}(x + \ln(n)) \\ &= \begin{cases} \left(1 - e^{-x - \ln(n)}\right)^n & \text{si } x + \ln(n) > 0 \\ 0 & \text{si } x + \ln(n) \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n & \text{si } x > -\ln(n) \\ 0 & \text{si } x \leq -\ln(n) \end{cases}. \end{aligned}$$

b. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Comme  $-\ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ , on a :

$$\exists N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \geq N, \quad x > -\ln(n).$$

Ainsi, pour  $n \geq N$  :

$$F_{W_n}(x) = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)\right)$$

Comme  $-\frac{e^{-x}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , on a :

$$\ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{e^{-x}}{n}$$

donc

$$n \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -e^{-x}$$

Ce dernier équivalent étant constant et non nul, il s'agit de la limite de l'expression :

$$n \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -e^{-x}.$$

Ainsi, par composition des limites :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{W_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-e^{-x}}$$

Or la fonction  $G$  définie, pour  $x \in \mathbb{R}$ , par  $G(x) = e^{-e^{-x}}$  est la fonction de répartition de la loi de Gumbel (elle est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  de dérivée  $f$ ).

Donc la suite de variables aléatoires  $(W_n)$  converge en loi vers la loi de Gumbel.