

Exercice 1 – d'après Ecricome 2010

Pour tout entier naturel n , on note $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n .
 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la notation X^k désigne le polynôme $x \mapsto x^k$; en particulier les notations 1 et X^0 désignent le polynôme $x \mapsto 1$ et la notation X désigne le polynôme $x \mapsto x$.

On considère l'application f qui à un polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$ associe le polynôme :

$$f(P) = P'' - 4XP'.$$

1. Étude de f .

Soit n un entier naturel fixé uniquement dans cette question.

- Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
- Calculer $f(1)$, $f(X)$ puis $f(X^k)$ pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$.
- Établir alors que la matrice A_n de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ est triangulaire.
- Prouver que f est diagonalisable et que chacun de ses espaces propres est de dimension 1.
- Soit P un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ .
Établir que : $\lambda = -4\deg(P)$.
- En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire (i.e. de coefficient dominant valant 1) H_n de degré n tel que :

$$(\mathcal{E}_n) : f(H_n) = -4nH_n.$$

2. Étude de la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- En dérivant la relation $(\mathcal{E}_n)$, démontrer que :

$$\forall n \geq 1, \quad f(H'_n) = -4(n-1)H'_n.$$

- En déduire que :

$$\forall n \geq 1, \quad H'_n = nH_{n-1} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \quad H_n - XH_{n-1} + \frac{(n-1)H_{n-2}}{4} = 0.$$

- Pourquoi peut-on affirmer que $H_0 = 1$ et $H_1 = X$?
- Calculer alors H_2 et H_3 .
- D'après ce qui précède, la suite $u_n = H_n(1)$ satisfait à la relation de récurrence :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad \forall n \geq 2, \quad u_n = u_{n-1} - \frac{(n-1)u_{n-2}}{4}.$$

Écrire un programme en Python calculant u_{2026} .

3. Application aux points critiques d'une fonction à trois variables.

On note U la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x \neq y \text{ et } y \neq z \text{ et } z \neq x\}$$

et on considère la fonction V définie sur U par :

$$\forall (x, y, z) \in U, \quad V(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \ln|x-y| - \ln|y-z| - \ln|z-x|.$$

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in U$.

a. Établir que (α, β, γ) est un point critique de V si et seulement si (α, β, γ) est solution du système :

$$(S) : \begin{cases} 2\alpha(\alpha - \gamma)(\alpha - \beta) = 2\alpha - \beta - \gamma \\ 2\beta(\beta - \alpha)(\beta - \gamma) = 2\beta - \alpha - \gamma \\ 2\gamma(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) = 2\gamma - \alpha - \beta \end{cases}$$

b. On introduit le polynôme $Q(X) = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$.

Montrer que (α, β, γ) est solution de (S) si et seulement si $Q'' - 4XQ'$ admet pour racines α, β, γ .

c. Prouver que si (α, β, γ) est un point critique de V alors

$$Q'' - 4XQ' = -12Q$$

puis que $Q = H_3$.

d. Donner alors les points critiques de V .

ÉLÉMENTS DE CORRECTION (D'APRÈS J.F. COSSUTTA) —
Dans tout l'exercice nous écrirons f_n à la place de f .

1. a. Soit P un élément de $\mathbb{R}_n[x]$.

Puisque P est de degré au plus n , P' est de degré au plus $n - 1$ et P'' est de degré au plus $n - 2$.

Donc P'' et XP' sont de degré au plus n et finalement $f_n(P)$ est un élément de $\mathbb{R}_n[x]$ comme combinaison linéaire de deux éléments de $\mathbb{R}_n[x]$.

Soit P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[x]$ et soit λ un réel alors :

$$\begin{aligned} f_n(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)'' - 4X(\lambda P + Q)' \\ &= \lambda P'' + Q'' - 4X(\lambda P' + Q') \\ &= \lambda(P'' - 4XP') + (Q'' - 4XQ') \\ &= \lambda f_n(P) + f_n(Q) \end{aligned}$$

donc f_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

b. $f_n(1) = 0_{\mathbb{R}_n[x]} - 4X \times 0_{\mathbb{R}_n[x]} = 0_{\mathbb{R}_n[x]}$

$$f_n(X) = 0_{\mathbb{R}_n[x]} - 4X \times 1 = -4X$$

Soit $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} f_n(X^k) &= k(k-1)X^{k-2} - 4X(kX^{k-1}) \\ &= -4kX^k + k(k-1)X^{k-2}. \end{aligned}$$

c. Pour tout k dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, $f_n(X^k)$ est combinaison linéaire d'éléments de la famille $(1, X, \dots, X^k)$ donc la matrice A_n de f_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ est triangulaire supérieure.

d. Puisque A_n est triangulaire, son spectre est l'ensemble de ses éléments diagonaux :

$$\text{Sp } f_n = \text{Sp } A_n = \{-4k; k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}.$$

La suite $(-4k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ étant strictement décroissante donc f_n possède $n + 1$ valeurs propres deux à deux distinctes or il s'agit d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension $n + 1$ donc f_n est diagonalisable et les sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

e. Soit P un vecteur propre de f_n associé à la valeur propre λ . Soit r son degré et a_r le coefficient de son terme de plus haut degré, on a $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $a_r \neq 0$.

Puisque $f_n(P) = \lambda P$ i.e. $P'' - 4XP' = \lambda P$, le coefficient de X^r dans $P'' - 4XP'$ est $-4(ra_r)$ et le coefficient de X^r dans λP est λa_r .

Donc $-4(ra_r) = \lambda a_r$. Or a_r n'est pas nul donc

$$\lambda = -4r = -4 \deg P.$$

f. $\diamond$ Existence de H_n .

Puisque $-4n$ est une valeur propre de f_n , il existe un vecteur propre P_n de f_n associé à la valeur propre $-4n$. D'après ce qui précède $\deg P_n = n$; on note a_n le coefficient de X^n dans P_n et on pose $H_n = \frac{1}{a_n} P_n$.

Par construction H_n est un polynôme unitaire. De plus, le degré de H_n est celui de P_n donc n .

Comme $H_n = \frac{1}{a_n} P_n$ et que P_n est un vecteur propre de f_n associé à la valeur propre $-4n$, il est de même pour H_n .

$\diamond$ Unicité de H_n .

Supposons que Q_n soit également un polynôme unitaire de degré n tel que $f_n(Q_n) = -4nQ_n$.

Alors Q_n et H_n sont deux éléments non nuls du sous-espace propre de f_n associé à la valeur propre $-4n$ qui est de dimension 1.

Donc il existe un réel α non nul tel que $Q_n = \alpha H_n$.

Comme Q_n et H_n sont unitaires et de degré n , on a $\alpha = 1$.

Donc $Q_n = H_n$ et l'on a l'unicité de H_n .

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$f_n(H_n) = -4nH_n \text{ i.e. } H_n'' - 4XH_n' = -4nH_n.$$

En dérivant, il vient :

$$H_n''' - 4H_n' - 4XH_n'' = -4nH_n'$$

soit :

$$H_n''' - 4XH_n'' = -4(n-1)H_n'.$$

Ainsi :

$$(H_n')'' - 4X(H_n')' = -4(n-1)H_n'.$$

Comme H_n' appartient à $\mathbb{R}_n[x]$:

$$f_n(H_n') = -4(n-1)H_n'.$$

- b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, H_n est unitaire et de degré n donc $T_n = \frac{1}{n}H'_n$ est un polynôme unitaire de degré $n-1$ donc :

$$f_n(T_n) = \frac{1}{n}f_n(H'_n) = \frac{1}{n}(-4(n-1)H'_n) = -4(n-1)T'_n.$$

Donc T_n est un polynôme unitaire de degré $n-1$ tel que

$$T''_n - 4XT'_n = -4(n-1)T_n$$

et par l'unicité définissant H_{n-1} (question 1.d) on a $T_n = H_{n-1}$ donc :

$$H'_n = nH_{n-1}.$$

Soit $n \geq 2$, on a :

$$H'_n = nH_{n-1} \text{ et } H'_{n-1} = (n-1)H_{n-2}$$

donc :

$$H''_n = nH'_{n-1} = n(n-1)H_{n-2}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} -4nH_n &= H''_n - 4XH'_n \\ &= n(n-1)H_{n-2} - 4X(nH_{n-1}) \\ &= n(n-1)H_{n-2} - 4X(nH_{n-1}) \end{aligned}$$

puis :

$$H_n = -\frac{n-1}{4}H_{n-2} + XH_{n-1}$$

i.e.

$$H_n - XH_{n-1} + \frac{n-1}{4}H_{n-2} = 0_{\mathbb{R}_n[x]}.$$

- c. Puisque 1 est un polynôme unitaire de degré 0 qui vérifie $(1)'' - 4X(1)' = -(4 \times 0)1$, on a $1 = H_0$.

De même X est un polynôme unitaire de degré 1 qui vérifie $(X)'' - 4X(X)' = -(4 \times 1)1$ donc $X = H_1$.

- d. On a :

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{R}_2[X]} &= H_2 - XH_1 + \frac{2-1}{4}H_0 \\ &= H_2 - X^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

donc :

$$H_2 = X^2 - \frac{1}{4}.$$

On a :

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{R}_3[X]} &= H_3 - XH_2 + \frac{3-1}{4}H_1 \\ &= H_3 - X\left(X^2 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}X \\ &= H_3 - X^3 + \frac{3}{4}X \end{aligned}$$

donc :

$$H_3 = X^3 - \frac{3}{4}X.$$

- e. Une première possibilité :

```
u0, u1 = 1, 1
for n in range(2, 2027):
    u0, u1 = u1, u1 - (n-1)/4*u0
```

alors u1 correspond à la valeur demandée.

Une autre possibilité :

```
u = [0 for n in range(2027)]
u[0] = 1
u[1] = 1
for n in range(2, 2027):
    u[n] = u[n-1] - (n-1)/4*u[n-2]
```

alors u[2026] correspond à la valeur demandée.

Cependant dans les deux cas, la valeur numérique ne peut pas être obtenue avec la précision usuelle des calculs en Python.

3. a. $\diamond$ Montrons que V est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U .

Les fonctions polynômes :

$$(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 \text{ et } (x, y, z) \mapsto x - y$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U .

La seconde ne s'annule pas sur U et $t \mapsto \ln|t|$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ donc, par composition :

$$(x, y, z) \mapsto \ln|x - y|$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U .

De même pour les fonctions :

$$(x, y, z) \mapsto \ln|y - z| \text{ et } (x, y, z) \mapsto \ln|z - x|.$$

Donc V est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U comme combinaison linéaire de quatre fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U .

$\diamond$ Pour tout $(x, y, z) \in U$:

$$\begin{aligned} \partial_1 V(x, y, z) &= 2x - \frac{1}{x-y} - \frac{(-1)}{z-x} \\ &= 2x - \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-z} \\ &= \frac{2x(x-y)(x-z) - (x-z) - (x-y)}{(x-y)(x-z)} \\ \partial_2 V(x, y, z) &= \frac{2y(y-x)(y-z) - (2y-x-z)}{(y-x)(y-z)} \\ \partial_3 V(x, y, z) &= \frac{2z(z-x)(z-y) - (2z-x-y)}{(z-x)(z-y)} \end{aligned}$$

Soit (α, β, γ) un élément de U .

Le fait que $\nabla V(\alpha, \beta, \gamma) = 0_{\mathbb{R}^3}$ équivaut successivement aux systèmes qui suivent :

$$\begin{cases} \frac{2\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma) - (2\alpha-\beta-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} = 0 \\ \frac{2\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma) - (2\beta-\alpha-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} = 0 \\ \frac{2\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) - (2\gamma-\alpha-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma) - (2\alpha-\beta-\gamma) = 0 \\ 2\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma) - (2\beta-\alpha-\gamma) = 0 \\ 2\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) - (2\gamma-\alpha-\beta) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma) = 2\alpha-\beta-\gamma \\ 2\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma) = 2\beta-\alpha-\gamma \\ 2\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) = 2\gamma-\alpha-\beta \end{cases}$$

b. $Q = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$ donc :

$$\begin{aligned} Q' &= (X - \beta)(X - \gamma) + (X - \alpha)(X - \gamma) + (X - \alpha)(X - \beta) \\ Q'' &= (X - \gamma) + (X - \beta) + (X - \gamma) \\ &\quad + (X - \alpha) + (X - \beta) + (X - \alpha) \\ &= 2(3X - (\alpha + \beta + \gamma)). \end{aligned}$$

Soit (α, β, γ) un élément de U :

$$\begin{aligned} Q''(\alpha) - 4\alpha Q'(\alpha) &= 2(3\alpha - (\alpha + \beta + \gamma)) \\ &\quad - 4\alpha((\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) + 0 + 0) \\ &= 2((2\alpha - \beta - \gamma) - 2\alpha(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)) \end{aligned}$$

donc $Q''(\alpha) - 4\alpha Q'(\alpha) = 0$ lorsque :

$$2\alpha(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) = 2\alpha - \beta - \gamma.$$

De même pour β et γ .

Donc (α, β, γ) est solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si $Q'' - 4XQ'$ admet pour racines α, β, γ .

c. Soit (α, β, γ) un point critique de V alors c'est un élément de U et α, β, γ sont distincts deux à deux.

Posons $Q = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$ alors α, β, γ sont alors trois racines distinctes de $Q'' - 4XQ'$.

Ainsi Q divise $Q'' - 4XQ'$ donc il existe T dans $\mathbb{R}[x]$ tel que $Q'' - 4XQ' = TQ$.

Puisque Q est de degré 3, $Q'' - 4XQ'$ est de degré 3.

Donc T est un polynôme constant.

Finalement il existe un réel c tel que $Q'' - 4XQ' = cQ$.

Le coefficient de X^3 dans Q est c et c'est -4×3 dans $Q'' - 4XQ'$. Ainsi $c = -12$ donc :

$$Q'' - 4XQ' = -12Q.$$

Puisque Q est un polynôme unitaire de degré 3 qui vérifie

$$Q'' - 4XQ' = -4(3)Q,$$

il résulte de 1.d que $Q = H_3$.

d. Si (α, β, γ) est un point critique de V , alors $H_3 = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$.

Puisque $H_3 = X^3 - \frac{3}{4}X$, les points critiques de V sont parmi : $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.

Réciproquement, on vérifie aisément que si (α, β, γ) est l'un des triplets alors c'est une solution de $(\mathcal{S})$ donc un point critique de V .

Exercice 2 – d'après EDHEC ECS 2019

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

On se place dans un espace euclidien E de dimension n et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E . Le produit scalaire des vecteurs x et y de E est noté $\langle x, y \rangle$ et la norme de x est notée $\|x\|$.

► Partie 1 : définition de l'adjoint u^* d'un endomorphisme u de E .

Dans toute cette partie, u désigne un endomorphisme de E .

On se propose de montrer qu'il existe un unique endomorphisme de E , noté u^* , qui à tout vecteur y de E associe le vecteur $u^*(y)$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle.$$

1. **a.** Montrer que si u^* existe, alors on a, pour tout y de E :

$$u^*(y) = \sum_{i=1}^n \langle u(e_i), y \rangle e_i.$$

- b.** En déduire que si u^* existe, alors u^* est unique.

2. **a.** Vérifier que l'application u^* définie par l'égalité établie à la question 1**a.** est effectivement un endomorphisme de E .
b. Conclure que cette application est solution du problème posé, c'est-à-dire que c'est l'unique endomorphisme de E , appelé adjoint de u , vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

► Partie 2 : étude des endomorphismes normaux.

On dit que u est un endomorphisme normal quand on a l'égalité :

$$u \circ u^* = u^* \circ u.$$

3. Soit f un endomorphisme symétrique de E . Donner son adjoint et vérifier que f est normal.

Dans la suite, u désigne un endomorphisme normal.

4. **a.** Montrer que : $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
b. En déduire que $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^*)$.
5. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u^* .
6. On suppose que u possède une valeur propre λ et on note E_λ le sous-espace propre associé.
a. Montrer que E_λ est stable par u^* .
b. Établir que $(u^*)^* = u$ puis en déduire que $E_\lambda^\perp$ est stable par u .

1. a. Par l'expression d'un vecteur dans la base orthonormée $\mathcal{B}$, on a :

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$$

et en particulier, pour $x = u^*(y)$, nous avons $u^*(y) = \sum_{i=1}^n \langle u^*(y), e_i \rangle e_i$.
Or $\langle u^*(y), e_i \rangle = \langle e_i, u^*(y) \rangle = \langle u(e_i), y \rangle$, donc pour tout y de E :

$$u^*(y) = \sum_{i=1}^n \langle u(e_i), y \rangle e_i$$

- b. Si u^* existe, $u^*(y)$ est parfaitement déterminé par la donnée de y , et des données de l'énoncé (u et la base $\mathcal{B}$).

Si u^* existe, u^* est unique.

2. a. Soit $f : y \mapsto \sum_{i=1}^n \langle u(e_i), y \rangle e_i$.

f est une application de E dans E (pour $y \in E$, $f(y)$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$).

Soit λ réel et x et y vecteurs de E . On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= \sum_{i=1}^n \langle u(e_i), \lambda x + y \rangle e_i \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda \langle u(e_i), x \rangle + \langle u(e_i), y \rangle) e_i \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda \langle u(e_i), x \rangle e_i + \langle u(e_i), y \rangle e_i) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n \langle u(e_i), x \rangle e_i + \sum_{i=1}^n \langle u(e_i), y \rangle e_i \\ &= \lambda f(x) + f(y) \end{aligned}$$

donc f est une application linéaire.

L'application u^* définie par l'égalité du 1.a. est un endomorphisme de E .

- b. Enfin, pour x et y dans E , avec la notation f de la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} \langle x, f(y) \rangle &= \langle x, \sum_{i=1}^n \langle u(e_i), y \rangle e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle u(e_i), y \rangle \langle x, e_i \rangle \\ &= \langle \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle u(e_i), y \rangle \\ &= \langle u(\sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i), y \rangle \\ &= \langle u(x), y \rangle \end{aligned}$$

Donc l'application f est solution du problème posé.
Par analyse-synthèse, nous avons montré l'existence et l'unicité de l'endomorphisme adjoint u^* de u , vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

3. Quand u est un endomorphisme symétrique, on a :
 $\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$, et par unicité de u^* , on a $u^* = u$.

De plus, $u \circ u^* = u^2 = u^* \circ u$ dans ce cas.

Pour f endomorphisme symétrique, $f^* = f$ et f est normal.

4. a. Pour $x \in E$,

$$\begin{aligned} \|u(x)\|^2 &= \langle u(x), u(x) \rangle = \langle x, u^*(u(x)) \rangle \\ &= \langle x, u(u^*(x)) \rangle \text{ car } u \text{ est normal} \\ &= \langle u(u^*(x)), x \rangle = \langle u^*(x), u^*(x) \rangle \\ &= \|u^*(x)\|^2 \end{aligned}$$

Comme les normes sont positives, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

- b. On a $x \in \ker u \Leftrightarrow u(x) = 0 \Leftrightarrow \|u(x)\| = 0 \Leftrightarrow \|u^*(x)\| = 0 \Leftrightarrow u^*(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \ker u^*$.

$\ker u = \ker u^*$

5. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u . Soit $x \in F^\perp$. Pour tout $y \in F$, nous avons :

$$\langle u^*(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

Comme $y \in F$ et que F est stable par u , $u(y)$ appartient à F . Et $x \in F^\perp$, donc $\langle x, u(y) \rangle = 0$.

Ainsi $\langle u^*(x), y \rangle = 0$ et $u^*(x) \in F^\perp$.

Si F est stable par u , $F^\perp$ est stable par u^* .

6. a. Soit $x \in E_\lambda$. On a $u(x) = \lambda x$. En composant par u^* linéaire, on a $u^*(u(x)) = \lambda u^*(x)$, et comme u est normal, $u(u^*(x)) = \lambda u^*(x)$. Ainsi $u^*(x) \in E_\lambda$.

Donc E_λ est stable par u^* .

- b. Soit x et y dans E . On a par définition de u^* :

$$\langle u(y), x \rangle = \langle y, u^*(x) \rangle$$

soit :

$$\langle u^*(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$

Par l'unicité d'un adjoint, on a $(u^*)^* = u$.

On applique 5. avec $F = E_\lambda$ et l'endomorphisme u^* . On obtient : $E_\lambda^\perp$ est stable par $(u^*)^*$.

Donc $E_\lambda^\perp$ est stable par u .

Exercice 3 – d'après Ecricome 2022

Dans ce problème, on considère un réel μ et un réel strictement positif a , et on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction :

$$F_{\mu,a} : x \mapsto \exp\left(-\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\right).$$

1. Soit a et μ deux réels tels que $a > 0$.
 - a. Justifier que $F_{\mu,a}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée notée $f_{\mu,a}$ et sa dérivée seconde $f'_{\mu,a}$.
 - b. En déduire les variations et la convexité de $F_{\mu,a}$ sur $\mathbb{R}$. On précisera les limites de $F_{\mu,a}$ en $+\infty$ et $-\infty$. Donner l'allure de la courbe de $F_{\mu,a}$ en y faisant figurer le point d'inflexion.
 - c. Montrer que $F_{\mu,a}$ est une fonction bijective de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I à déterminer. On note G la réciproque de $F_{0,1}$. Expliciter G .

2. Soit a et μ deux réels tels que $a > 0$.

Montrer que $f_{\mu,a}$ est une densité, et que $F_{\mu,a}$ est la fonction de répartition associée.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on suppose que toutes les variables aléatoires introduites dans la suite du problème sont définies sur cet espace probabilisé.

Soit μ et a des réels tels que $a > 0$. On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit la loi de Gumbel de paramètre (μ, a) , ce que l'on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(\mu, a)$, si elle admet $f_{\mu,a}$ comme densité.

3. Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$.

Soit μ un réel et a un réel strictement positif.

Montrer que la variable aléatoire $X = aZ + \mu$ est une variable aléatoire à densité qui suit la loi de Gumbel de paramètre (μ, a) .

On admet que réciproquement, si X suit la loi de Gumbel de paramètre (μ, a) , alors $Z = \frac{X-\mu}{a}$ suit la loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$.

4. a. Soit U une variable aléatoire à densité qui suit la loi uniforme sur $]0, 1[$.

Montrer que la variable aléatoire $Y = -\ln(-\ln(U))$ suit la loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$.

- b. Écrire une fonction Python `gumbel(mu, a)` renvoyant une réalisation d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(\mu, a)$.

5. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Gumbel de paramètre (μ, a) et $Z = \frac{X-\mu}{a}$.

- a. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \ln(u)e^{-u} du$ converge.

- b. À l'aide du changement de variable $t = e^{-u}$, montrer que l'intégrale $\int_0^1 \ln(-\ln(t))dt$ converge.

On notera dans la suite :

$$\gamma = -\int_0^1 \ln(-\ln(t))dt.$$

- c. Montrer que Z admet une espérance et que $\mathbb{E}(Z) = \gamma$.

On pourra utiliser le changement de variable $u = \exp(-\exp(-x))$.

- d. En déduire que X admet une espérance et déterminer $\mathbb{E}(X)$ en fonction de γ , μ et a .

On admet que X admet un moment d'ordre 4 et en particulier que la variance de X notée σ^2 est égale à a^2c où c est un réel strictement positif indépendant de a et de μ .

6. Soit Y et Z deux variables aléatoires indépendantes, de même loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$.

- a. Montrer que $-Z$ est une variable aléatoire à densité, et déterminer une densité g de $-Z$.

- b. Montrer que pour tout réel x , l'intégrale $\int_0^{+\infty} ue^{-(e^{-x}+1)u} du$ converge et déterminer sa valeur.

- c. À l'aide du changement de variable $u = e^t$, en déduire que pour tout réel x , l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t)g(t)dt$ converge.

- d. Montrer que $Y - Z$ est une variable aléatoire à densité, de densité la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}.$$

1. (a) Par composition de fonctions $\mathcal{C}^2$ (exponentielle, fonction affine), $F_{\mu,a}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Ensuite, si $x \in \mathbb{R}$, $f_{\mu,a}(x) = F'_{\mu,a}(x) = \frac{1}{a} \exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right) \exp\left(-\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\right)$.

On dérive ensuite ce produit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'_{\mu,a}(x) = -\frac{1}{a^2} \exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right) \exp\left(-\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\right) + \frac{1}{a^2} \exp^2\left(\frac{\mu-x}{a}\right) \exp\left(-\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\right).$$

- (b) $f_{\mu,a}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $F_{\mu,a}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

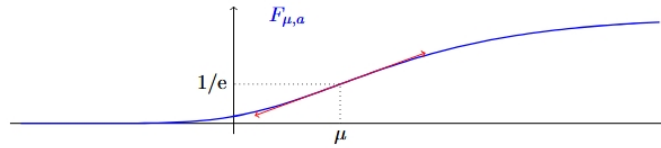
$$\text{Et } \forall x \in \mathbb{R}, f'_{\mu,a}(x) = \frac{1}{a^2} \exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right) \left(\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right) - 1\right) \exp\left(-\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\right).$$

Ainsi, $f'_{\mu,a}(x)$ a le même signe que $1 - \exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)$, qui est donné par le signe de $\frac{\mu-x}{a}$. On peut donc donner le tableau de signe de $f'_{\mu,a}$.

x	$-\infty$	μ	$+\infty$
$\frac{\mu-x}{a}$	+	0	-
$f'_{\mu,a}(x)$	+	0	-

Ainsi, $F_{\mu,a}$ est convexe sur $]-\infty, \mu]$, concave sur $[\mu, +\infty[$, et possède un point d'inflexion en μ .

Enfin, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\mu,a}(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\mu,a}(x) = 0$.



(c)

x	$-\infty$	$+\infty$
$F_{\mu,a}(x)$	0	1

On peut donc dresser ci-contre le tableau des variations de $F_{\mu,a}$.

Ainsi, $F_{\mu,a}$ est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$, tend vers 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$.

Par le théorème de la bijection, $F_{\mu,a}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]0, 1[$.

Soit $y \in]0, 1[$ et $x \in \mathbb{R}$, on résout

$$y = F_{0,1}(x) \iff y = \exp(-\exp(-x)) \iff \ln(y) = -\exp(-x) \iff \ln(-\ln(y)) = -x \iff x = -\ln(-\ln(y)).$$

Donc $G : y \mapsto -\ln(-\ln(y))$.

2. La fonction $f_{\mu,a}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\int_x^y f_{\mu,a}(t) dt = F_{\mu,a}(y) - F_{\mu,a}(x)$. Donc par les limites précédentes,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu,a}(t) dt \text{ converge et vaut } 1.$$

Ainsi, $f_{\mu,a}$ est une densité de probabilité.

$$\text{Par la limite précédente, } F_{\mu,a}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\mu,a}(t) dt.$$

Ainsi, $F_{\mu,a}$ est bien la fonction de répartition associée à la densité $f_{\mu,a}$.

3. On sait qu'une transformation affine (non constante) d'une variable aléatoire à densité est à densité. De plus, si une variable Z a pour densité f , alors $aZ + \mu$ a pour densité $x \mapsto \frac{1}{a} f\left(\frac{x-\mu}{a}\right)$. Ici, comme Z a pour densité $f_{0,1} : x \mapsto \exp(-x) \exp(-\exp(-x))$, alors X a pour densité $f_{\mu,a}$.

Ainsi X suit la loi $\mathcal{G}(\mu, a)$.

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$P(Y \leq x) = P(-\ln(-\ln(U)) \leq x) = P(G(U) \leq x) = P(U \leq F_{0,1}(x)) = F_U(F_{0,1}(x)) = F_{0,1}(x) \quad \text{car } F_{0,1}(x) \in]0, 1[$$

Ainsi, Y suit la loi $\mathcal{G}(0, 1)$.

(b)

```
def gumbel(mu, a):
    u = rd.random()
    z = -np.log(-np.log(u))
    return a*z + mu
```

5. (a) • $u \mapsto \ln(u)e^{-u}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Par croissances comparées $\lim_{u \rightarrow 0} \sqrt{u} \ln(u) = 0$, donc $|\ln(u)e^{-u}| \underset{u \rightarrow 0}{=} o(u^{-1/2})$. Or $\int_0^1 u^{-1/2} du$ converge. Donc par critère de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\int_0^1 \ln(u)e^{-u} du$ converge absolument, donc converge.

• Par croissances comparées $\lim_{u \rightarrow +\infty} u^2 \ln(u)e^{-u} = 0$, donc $\ln(u)e^{-u} \underset{u \rightarrow +\infty}{=} o(u^{-2})$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2} du$ converge et $\forall u \in [1, +\infty[$, $\frac{1}{u^2} \geq 0$. Donc par critère de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \ln(u)e^{-u} du$ converge.

Ainsi, $\int_0^{+\infty} \ln(u)e^{-u} du$ converge.

(b) La fonction $u \mapsto e^{-u}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissante, bijective de $]0, +\infty[$ vers $]0, 1[$.

Et la fonction $t \mapsto \ln(-\ln(t))$ est continue sur $]0, 1[$.

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \ln(u)e^{-u} du$ a même nature et même valeur que l'intégrale $\int_0^1 \ln(-\ln(t)) dt$.

Ainsi, l'intégrale $\int_0^1 \ln(-\ln(t)) dt$ converge.

(c) Z admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{0,1}(x) dx$ converge c'est-à-dire si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x} e^{-e^{-x}} dx$ converge.

Or la fonction $x \mapsto e^{-e^{-x}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, bijective de $\mathbb{R}$ vers $]0, 1[$ et de dérivée $x \mapsto e^{-x} e^{-e^{-x}}$.

Et $u \mapsto -\ln(-\ln(u))$ est continue sur $]0, 1[$. Donc par le théorème de changement de variable $\int_0^1 -\ln(-\ln(u)) du$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x} e^{-e^{-x}} dx$ sont de même nature et en cas de convergence égales.

D'après la question précédente, $\int_0^1 -\ln(-\ln(u)) du$ converge et vaut γ .

Ainsi, Z admet une espérance et $E[Z] = \gamma$.

(d) Comme $X = aZ + \mu$, alors par linéarité, X admet une espérance et $E[X] = a\gamma + \mu$.

6. (a) $-Z$ est une transformation affine (non constante) de Z , qui est à densité, donc $-Z$ est encore une variable aléatoire à densité, et une densité de $-Z$ est

$$x \mapsto \frac{1}{|-1|} \exp\left(\frac{-x}{-1}\right) \exp\left(-\exp\left(\frac{-x}{-1}\right)\right) = \exp(x) \exp(-\exp(x)).$$

Donc $-Z$ est une variable aléatoire à densité de densité $x \mapsto \exp(x) \exp(-\exp(x))$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $\lambda = e^{-x} + 1 > 0$, et notons W une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ . Alors W admet une espérance qui vaut $\frac{1}{\lambda}$. Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \lambda u e^{-\lambda u} du$ converge

et vaut $\frac{1}{\lambda}$. Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} u e^{-\lambda u} du$ converge et vaut $\frac{1}{\lambda^2}$.

Ainsi, $\int_0^{+\infty} u e^{-(e^{-x}+1)u} du$ converge et $\int_0^{+\infty} u e^{-(e^{-x}+1)u} du = \frac{1}{(e^{-x}+1)^2}$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_{0,1}(x-t)g(t) = e^{t-x}e^{-e^{t-x}}e^te^{-e^t} = e^{-x}e^{-(e^{-x}+1)e^t}e^{2t}.$$

On pose le changement de variable $t \mapsto e^t$, qui est $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. Ainsi, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t)g(t)dt$ a la même nature (et, si elle converge, même valeur) que

$$e^{-x} \int_0^{+\infty} e^{-(e^{-x}+1)u} u du.$$

Or que cette dernière intégrale converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi, pour tout réel x , l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t)g(t)dt$ converge.

(d) Comme Y et $-Z$ sont indépendantes et à densité, alors $Y - Z = Y + (-Z)$ est à densité, et une densité est donnée par le produit de convolution

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t)g(t)dt = e^{-x} \int_0^{+\infty} e^{-(e^{-x}+1)u} u du = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$

car $x \mapsto \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, une densité de $Y - Z$ est $x \mapsto \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.