

Consignes

- L'énoncé comporte deux problèmes.
Ces derniers peuvent être traités dans un ordre quelconque mais doivent être chacun commencés sur une nouvelle page et les questions doivent être séparées d'une ligne horizontale sur toute la largeur de la page.
- Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.
- La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- Les résultats doivent être mis en valeur et les pages doivent être numérotées.

Problème 1

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, défini pour tous $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ par :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

On identifie les ensembles $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tous $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\langle x, y \rangle = {}^tXY \quad \text{où } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Pour tous réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, on note $\text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont égaux à $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Enfin, on rappelle qu'une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale lorsque P est inversible et que $P^{-1} = {}^tP$.

Partie A - Mise en place d'un exemple

On considère les matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = {}^tAA.$$

- a.** La matrice A est-elle inversible? Déterminer le rang de A .
 - b.** Calculer les matrices A^2 et A^3 et vérifier : $A^3 - A^2 + A = 0$.
 - c.** En déduire les valeurs propres de A . La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
- a.** Justifier que la matrice B est diagonalisable.
 - b.** On pose : $R = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Vérifier que la matrice R est orthogonale.
 - c.** Montrer que la matrice tRBR est diagonale.

Dans toute la suite du problème, M désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose $r = \text{rg}(M)$.
On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est M .

Partie B - Valeurs singulières d'une matrice

On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice tM , et $h = g \circ f$.

3. Montrer que pour tous vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$:

$$\langle x, g(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle \quad \text{et} \quad \langle x, h(x) \rangle = \|f(x)\|^2.$$

4. *a.* Soit x appartenant à $\text{Ker}(h)$. En calculant $\langle x, h(x) \rangle$, montrer que x appartient à $\text{Ker}(f)$.
b. En déduire la relation $\text{Ker}(h) = \text{Ker}(f)$ puis $\text{rg}(h) = r$.
5. *a.* Justifier que l'endomorphisme h est diagonalisable et qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de h .
b. Montrer que les valeurs propres de h sont positives ou nulles.

On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_1$.

6. Justifier que la matrice P est orthogonale et montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ positifs ou nuls tels que : ${}^tMM = PD^tP$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Les réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ étant positifs ou nuls, on pose, pour tout i de $\llbracket 1; n \rrbracket$, $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$.
Les réels $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ sont appelés les **valeurs singulières** de la matrice M .

7. Dans cette question uniquement, on suppose que la matrice M est symétrique.
Déterminer, dans ce cas, les valeurs singulières de M en fonction de ses valeurs propres.
8. Justifier que la matrice D admet exactement r coefficients diagonaux non nuls.

Dans toute la suite, on suppose que les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont non nuls et donc que les réels $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ sont nuls.

9. *a.* Pour tout i de $\llbracket 1; r \rrbracket$, justifier que $f(\varepsilon_i)$ est non nul et calculer $\|f(\varepsilon_i)\|$.
b. On pose, pour tout i de $\llbracket 1; r \rrbracket$, $u_i = \frac{1}{\|f(\varepsilon_i)\|} f(\varepsilon_i)$.
Montrer que la famille $(u_1, \dots, u_r)$ est une famille orthonormée.
c. En déduire qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1$ (au départ) et la base $\mathcal{B}_2$ (à l'arrivée) est :

$$\text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0)$$

10. On note Q la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_2$ et Δ la matrice $\text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0)$.
Justifier que la matrice Q est orthogonale et, en calculant de deux façons différentes la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ (au départ) et la base $\mathcal{B}_2$ (à l'arrivée), montrer : $M = Q\Delta^tP$.
11. *Retour sur l'exemple*—
Déterminer deux matrices orthogonales P_1 et Q_1 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale Δ_1 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : $A = Q_1\Delta_1^tP_1$.

Partie C - Pseudo-inverse d'une matrice et application

On reprend les notations de la partie B.

Il existe donc deux matrices orthogonales P et Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et des réels strictement positifs $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ tels que :

$$M = Q\Delta^tP \quad \text{avec} \quad \Delta = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0).$$

On définit la matrice M^+ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $M^+ = P \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \dots, 0\right)^t Q$.

La matrice M^+ est appelée la **matrice pseudo-inverse** de M .

On note f^+ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M^+ , et $p = f \circ f^+$.

12. Justifier que, si M est inversible, alors $M^{-1} = M^+$.

13. *a.* Simplifier le produit MM^+ .

b. Montrer que p est un projecteur orthogonal.

c. Montrer que $\operatorname{rg}(MM^+) = r$ puis en déduire : $\operatorname{Im}(p) = \operatorname{Im}(f)$.

14. *Application –*

Soit $y \in \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Im}(f)$. Il n'existe donc pas de vecteur x de $\mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = y$. On cherche alors à déterminer un vecteur x^* de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\|y - f(x^*)\| = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|y - f(x)\|.$$

a. Justifier : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|y - p(y)\| \leq \|y - f(x)\|$.

b. Proposer un vecteur de $\mathbb{R}^n$ répondant au problème posé.

c. Montrer que, lorsque $r < n$, il existe au moins deux vecteurs distincts de $\mathbb{R}^n$ répondant au problème posé.

15. *Retour sur l'exemple –*

On note f_1 l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice A et on considère $y = (1, 1, 1)$.

a. Déterminer $\operatorname{Im}(f_1)$ et vérifier que y n'appartient pas à $\operatorname{Im}(f_1)$.

b. Montrer que :

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \|y - f_1(x_1, x_2, x_3)\|^2 = (x_2 + x_3 - 1)^2 + (x_1 - x_3 + 1)^2 + 1.$$

c. En déduire deux vecteurs distincts x^* et z^* de $\mathbb{R}^3$ tels que :

$$\|y - f_1(x^*)\| = \|y - f_1(z^*)\| = \min_{x \in \mathbb{R}^3} \|y - f_1(x)\|.$$

Problème 2

On considère deux variables aléatoires X et Y , définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, admettant pour densités respectives f_X et f_Y . On rappelle que la fonction h définie par :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt$$

est une densité de la variable aléatoire $X + Y$.

Partie I - un calcul d'intégrale

1. Déterminer pour quelles valeurs du réel α l'intégrale J_α converge où

$$J_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha}.$$

2. Calculer J_1 .

3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout réel α supérieur ou égal à 1, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}} dt = \frac{1}{2\alpha} J_\alpha.$$

4. En déduire que, pour tout réel α supérieur ou égal à 1, on a :

$$J_{\alpha+1} = \frac{2\alpha-1}{2\alpha} J_\alpha.$$

5. Pour n entier supérieur ou égal à 2, calculer J_n .

Partie II - Loi de Student à n degrés de liberté

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g_n par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g_n(t) = \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

6. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel k_n tel que la fonction $f_n = \frac{1}{k_n} g_n$ soit une densité de probabilité. Exprimer k_n à l'aide de $J_{\frac{n+1}{2}}$. (On pourra, en justifiant sa validité, utiliser le changement de variables $u = \frac{t}{\sqrt{n}}$).

7. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de densité f_n .

On dira que X suit une loi de Student à n degrés de liberté.

a. Montrer que X admet une espérance si et seulement si $n > 1$ et la calculer dans ce cas.

b. Montrer que X admet une variance si et seulement si $n > 2$; exprimer $V(X)$ en fonction de k_n , n et $J_{\frac{n-1}{2}}$ puis vérifier que :

$$V(X) = \frac{n}{n-2}.$$

Lorsque $n = 1$ la loi de Student à 1 degré de liberté s'appelle *loi de Cauchy* et une densité sur $\mathbb{R}$ est donc :

$$f_1 : t \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}.$$

Partie III - Simulation d'une loi

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, un rayon lumineux part de l'origine O et frappe un écran représenté par la droite d'équation $x = 1$, en un point M . On suppose que θ , mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$, est une variable aléatoire de loi uniforme sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

8. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $\tan(\theta)$.

En déduire que $\tan \theta$ est une variable aléatoire à densité, dont on explicitera une densité.

9. Exprimer Y , variable aléatoire égale à l'ordonnée du point M , en fonction de θ . Reconnaître la loi de Y .

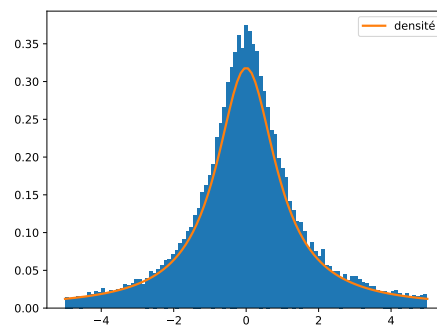
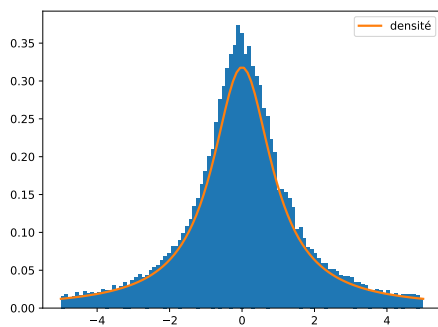
10. On considère le programme Python (incomplet) suivant :

```

1 import numpy as np
2 import numpy.random as rd
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 U = rd.random(50000)
5 L = np.tan(np.pi*(U - 1/2))
6 x = np.linspace(-5, 5, 100)
7 plt.hist(L, bins=x, density=True)
8 y = _____
9 plt.plot(x, y, linewidth=2, label="densité")
10 plt.legend()
11 plt.show()

```

qui est censé créer une image semblable à celles qui suivent :



Expliquer ce que font les lignes 4 et 5.

Compléter la ligne 8.

Partie IV - Obtention d'une loi de Cauchy à partir de lois normales

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

11. Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de fonction de répartition F . On notera G la fonction de répartition de la variable aléatoire $|Y|$.
 - a. On suppose dans cette question que Y est une variable aléatoire de densité f continue sur $\mathbb{R}$.
 - i. Exprimer une densité de $-Y$ à l'aide de f .
 - ii. Montrer que Y et $-Y$ ont même loi si et seulement si f est paire.
 - iii. On suppose cette condition vérifiée. Exprimer G à l'aide de F et montrer que $|Y|$ est une variable aléatoire à densité. Exprimer une densité g de $|Y|$ en fonction de f .
 - b. Inversement, on suppose dans cette question que $|Y|$ est une variable aléatoire de densité g , et que Y et $-Y$ ont la même loi.
 - i. Montrer que, pour tout réel x , $\mathbb{P}(Y = x) = 0$, puis exprimer $F(x)$ en fonction de $F(-x)$.
 - ii. Exprimer $F(x)$ en fonction de G et de x (on pourra distinguer deux cas : $x < 0$ et $x \geq 0$).
 - iii. En déduire que Y est une variable à densité et exprimer une densité f de Y en fonction de g .
12. Soit c un réel strictement positif. À l'aide du changement de variable $u = e^{2t}$ (dont on justifiera le caractère licite), montrer que l'intégrale suivante converge et la calculer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t} e^{-\frac{ce^{2t}}{2}} dt.$$

13. Soit X et X' deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, **indépendantes**, à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, de même densité φ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

- a.* Montrer que la variable aléatoire $Z = \ln |X|$ est une variable aléatoire à densité, et en déterminer une densité.
- b.* Quelle est une densité de la variable aléatoire $-Z$?
- c.* Montrer qu'une densité h de la variable aléatoire $\ln \left| \frac{X}{X'} \right|$ est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{2}{\pi} \frac{e^x}{e^{2x} + 1}.$$

- d.* Déterminer une densité de la variable aléatoire $\left| \frac{X}{X'} \right|$ puis reconnaître la loi de $\frac{X}{X'}$.
-