TD 20 – Révisions - analyse et probabilités

Problème 1 - EM Lyon 2012

Partie 1 : Formule de Stirling

Pour tout entier naturel n, on définit $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \mathrm{d}t$.

1. Calculer W_0 et W_1.

2. ***a.*** Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
b. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $W_n > 0$.

3. ***a.*** Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
b. En déduire, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $(n+1)W_{n+1}W_n = W_1 W_0$.

4. ***a.*** Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $W_n \geqslant W_{n+1} \geqslant \dfrac{n+1}{n+2}W_n$.
b. En déduire : $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$, puis : $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

5. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $W_{2n} = \dfrac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$.

On note, pour tout entier n tel que $n \geqslant 1$: $A_n = \dfrac{1}{n!}n^n e^{-n}\sqrt{n}$.

On note, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$: $a_n = -1 - (n - \dfrac{1}{2})\ln(1 - \dfrac{1}{n})$.

6. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} a_n$ converge.

7. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$: $a_n = \ln(A_n) - \ln(A_{n-1})$.

8. En déduire que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite ℓ est strictement positive.

9. ***a.*** Justifier : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ell}n^n e^{-n}\sqrt{n}$.
b. En utilisant l'expression de W_{2n} à l'aide de factorielles, en déduire la valeur de ℓ et l'équivalent suivant :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

Partie 2 : Étude de variables aléatoires

Soit un réel a strictement positif et la fonction $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout réel x, par :

$$\begin{cases} f_a(x) = 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ f_a(x) = \frac{x}{a^2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

10. Montrer que f_a est une densité.
On considère une variable aléatoire X admettant f_a comme densité.

11. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

12. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et calculer $\mathbb{E}(X)$.

13. Montrer que la variable aléatoire X admet une variance $\mathbb{V}(X)$ et calculer $\mathbb{V}(X)$.

14. ***a.*** On considère une variable aléatoire V suivant une loi uniforme sur l'intervalle $]0,1]$.
Montrer que la variable aléatoire $Z = a\sqrt{-2\ln(V)}$ suit la même loi que la variable aléatoire X.
b. En déduire un programme en langage Python simulant la variable aléatoire X (le réel a strictement positif étant un paramètre entré par l'utilisateur).

Pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$, on considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n.
On effectue, dans U_n, des tirages d'une boule avec remise. On suppose que tous les tirages dans U_n sont équiprobables. On s'arrête dès que l'on obtient une boule déjà obtenue.
On note T_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

15. Justifier : $\mathbb{P}(\mathrm{T}_n > n+1) = 0$.

16. Déterminer $\mathbb{P}(\mathrm{T}_n > k)$ pour tout entier k tel que $k \leqslant n$.

On considère la variable aléatoire $\mathrm{Y}_n = \frac{\mathrm{T}_n}{\sqrt{n}}$.
On se propose d'étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(\mathrm{Y}_n)_{n\geqslant 2}$.
Soit $y \in [0;+\infty[$. On note k_n l'entier naturel égal à la partie entière de $y\sqrt{n}$.
On a donc : $k_n \leqslant y\sqrt{n} \leqslant 1 + k_n$.

17. Justifier : $\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n > y) = \mathbb{P}(\mathrm{T}_n > k_n)$.

18. En utilisant **9.*b***, montrer :

$$\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n > y) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-k_n}\left(1 - \frac{k_n}{n}\right)^{k_n - n}.$$

19. ***a.*** Déterminer le développement limité d'ordre 2 de $t \mapsto -t + (t-1)\ln(1-t)$ en 0.

b. En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-k_n + (k_n - n)\ln\left(1 - \frac{k_n}{n}\right)\right) = -\frac{y^2}{2}$.

20. Montrer que la suite de variables aléatoires $(\mathrm{Y}_n)_{n\geqslant 2}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on précisera une densité.

Problème 2 - EM Lyon 2018

On définit la fonction I d'une variable réelle x par : $\mathrm{I}(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{xt} + \mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$.

Partie I : Étude d'une suite d'intégrales

On pose, pour tout k de $\mathbb{N}$, $\mathrm{W}_k = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(u))^k \mathrm{d}u$.

1. Calculer les intégrales W_0 et W_1.

2. ***a.*** Soit $k \in \mathbb{N}$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer : $\mathrm{W}_k - \mathrm{W}_{k+2} = \dfrac{1}{k+1}\mathrm{W}_{k+2}$.

b. En déduire : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{W}_{2k} = \dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

Partie II : Une autre expression de $\mathrm{I}(x)$

3. Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \mathrm{W}_k$.
Pour cela, on pourra utiliser le changement de variable $t = \sin(u)$ après avoir justifié sa validité.

4. ***a.*** Montrer que la fonction I est définie sur $\mathbb{R}$ et préciser sa parité.

b. Donner la valeur de $\mathrm{I}(0)$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

a. Soient $t \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}$. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ appliquée à la fonction $u \longmapsto \mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}$ entre 0 et xt, montrer :

$$\left|\mathrm{e}^{xt} + \mathrm{e}^{-xt} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2(xt)^{2k}}{(2k)!}\right| \leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{e}^x.$$

b. En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\left|\mathrm{I}(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2x^{2k}}{(2k)!}\mathrm{W}_{2k}\right| \leqslant \dfrac{x^{2n+1}\pi}{2(2n+1)!}\mathrm{e}^x$.

c. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$ converge et que l'on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} = \frac{1}{\pi}\mathrm{I}(x)$.

Partie III : Équivalent de $\mathrm{I}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

6. Montrer, pour tout x de $\mathbb{R}_+$: $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

7. ***a.*** Montrer, pour tout v de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$: $1 \leqslant \dfrac{1}{1-v} \leqslant (1+v)^2$.

b. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer, à l'aide du changement de variable $u = 1-t$:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}\sqrt{1-\frac{u}{2}}}\mathrm{d}u.$$

c. En déduire, pour tout x de $\mathbb{R}_+$:

$$\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \leqslant \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u + \frac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{2}} \int_0^1 \mathrm{e}^{-xu}\sqrt{u}\mathrm{d}u.$$

8. ***a.*** Rappeler l'expression d'une densité de la loi normale d'espérance nulle et de variance $\frac{1}{2}$.
En déduire les convergences et les valeurs des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

b. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. À l'aide du changement de variable $t = \sqrt{xu}$, montrer :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}} \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \mathrm{e}^{-xu}\sqrt{u}\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}.$$

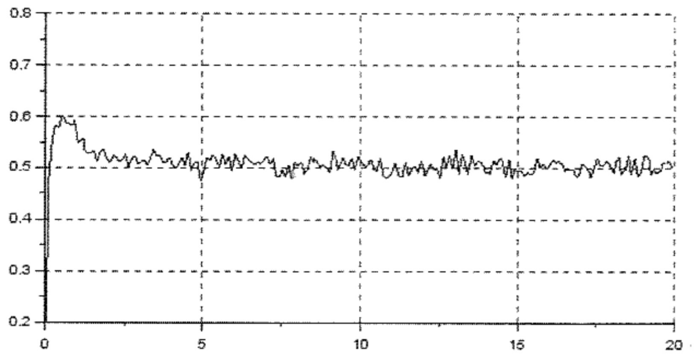
9. En déduire : $\mathrm{I}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^x\sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}}$.

Partie IV : Une application en probabilités

Dans cette partie, λ désigne un réel strictement positif.
On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, suivant toutes les deux la loi de Poisson de paramètre λ.
On s'intéresse à la probabilité de l'événement $[\mathrm{X} = \mathrm{Y}]$.

10. ***a.*** Écrire une fonction Python `estime(lam)` qui prend en argument un réel `lam` strictement positif, simule un grand nombre de fois les variables aléatoires X et Y, et renvoie une estimation de $\mathbb{P}([\mathrm{X} = \mathrm{Y}])$.
On rappelle que, une fois importé le module `numpy.random as rd`, l'instruction `rd.poisson(lam)` simule la loi de Poisson de paramètre `lam`.

b. Grâce à la fonction précédente, on trace, en fonction de λ, une estimation de $\sqrt{\pi\lambda}\mathbb{P}([\mathrm{X} = \mathrm{Y}])$ pour $\lambda \in]0;20]$ et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, proposer un équivalent de $\mathbb{P}([\mathrm{X} = \mathrm{Y}])$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

11. Montrer : $\mathbb{P}([\mathrm{X} = \mathrm{Y}]) = \mathrm{e}^{-2\lambda} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}$.

12. ***a.*** Exprimer $\mathbb{P}([\mathrm{X} = \mathrm{Y}])$ en fonction de λ et de la fonction I.

b. En déduire un équivalent de $\mathbb{P}([\mathrm{X} = \mathrm{Y}])$ lorsque λ tend vers $+\infty$.