TD 21 – Estimation

Exercice 21-1

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[a,b]$, où b est connu, et où l'on cherche à déterminer a. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $Y_n = \min(X_1,\ldots,X_n)$

1. Montrer que Y_n est une variable à densité, et en donner une densité.

2. Déterminer $\mathbb{E}(Y_n)$, puis le biais de Y_n en a. Comment interpréter le signe de ce biais ?

3. En utilisant la question précédente, proposer un estimateur sans biais de a.

4. Montrer que Y_n est un estimateur asymptotiquement sans biais et convergent de a.

Exercice 21-2

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée de variance σ^2, avec σ inconnu.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables indépendantes, de même loi que X. On note alors $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

Montrer que S_n est un estimateur sans biais et convergent de σ^2.

Exercice 21-3

Soit θ un réel strictement positif, et soient $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables i.i.d. suivant la loi uniforme sur $[0,2\theta]$.

On pose $M_n = \max(X_1,\ldots,X_n)$ et $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Déterminer la loi de M_n, calculer son espérance et sa variance.

2. En déduire que $U_n = \frac{n+1}{2n}M_n$ est un estimateur sans biais de θ.

3. De $\overline{X_n}$ et U_n, lequel est un meilleur estimateur de θ ?

Exercice 21-4

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

On pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Déterminer une densité de S_n.

2. Calculer l'espérance de $\frac{1}{S_n}$.

3. En déduire un estimateur sans biais de λ.

Exercice 21-5

Soit $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la même loi d'espérance μ et de variance σ^2.

On définit deux estimateurs de μ en posant $T_n = \dfrac{X_1+X_2}{2}$ et $V_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i - \dfrac{X_1-X_2}{2}$.

Lequel de ces deux estimateurs est le meilleur ?

Exercice 21-6

Soit $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi normale d'espérance θ inconnue et de variance 1.

On pose $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Quelle est la loi de $\overline{X_n}$?

2. Soit $\alpha \in]0,1[$ et soit t_α l'unique réel tel que $\Phi(t_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

Montrer que $\left[\overline{X_n} - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}, \overline{X_n} + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance de θ au niveau de confiance $1-\alpha$.

Exercice 21-7

On suppose que la probabilité qu'un individu contagieux transmette un virus à un individu sain est $p \in]0,1[$ inconnu, et que l'on cherche à évaluer.
Soit $(\mathrm{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.

1. On pose $\overline{\mathrm{Y}_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Y}_i$.

a. Montrer que $\overline{\mathrm{Y}_n}$ est un estimateur sans biais de p.

b. Déterminer le risque quadratique de $\overline{\mathrm{Y}_n}$ en p.

2. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que $\left[\overline{\mathrm{Y}_n} - \sqrt{\frac{5}{n}}, \overline{\mathrm{Y}_n} + \sqrt{\frac{5}{n}}\right]$ est un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0,95.

Exercice 21-8

Soit $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables i.i.d. d'espérance μ inconnue et de variance σ^2 connue.
Déterminer à l'aide du théorème central limite un intervalle de confiance asymptotique de μ au niveau de confiance $1-\alpha$.