

# TD 22 – Révisions - probabilités

## Problème 1 - ESSEC 1 ECE 2010

### Introduction

On utilise dans tout le problème les notations  $\mathbb{E}(X)$  et  $\mathbb{V}(X)$  pour désigner l'espérance et la variance d'une variable aléatoire  $X$ .

On rappelle que pour tout entier naturel  $n$ , le moment centrée d'ordre  $n$  de  $X$ , s'il existe, est défini par

$$\mu_n(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^n).$$

On dit qu'une variable aléatoire  $X$  admet un kurtosis lorsque

- $X$  admet des moments centrés d'ordre 2, 3 et 4 ;
- $\mathbb{V}(X) \neq 0$ .

On appelle *kurtosis*, ou *coefficient d'aplatissement* de  $X$ , le réel défini par :

$$K(X) = \frac{\mu_4(X)}{(\mu_2(X))^2} - 3 = \frac{\mu_4(X)}{(\mathbb{V}(X))^2} - 3.$$

On admet le résultat suivant : une variable aléatoire  $X$  admet une variance nulle si, et seulement si, il existe un réel  $a$  tel que  $\mathbb{P}(X = a) = 1$ . On dit dans ce cas que la loi de  $X$  est certaine.

**Question préliminaire** Soit  $X$  une variable aléatoire admettant un kurtosis. Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels, avec  $\alpha \neq 0$ . Montrer que la variable aléatoire  $\alpha X + \beta$  admet un kurtosis, et que l'on a :

$$K(\alpha X + \beta) = K(X).$$

### Partie I. Des exemples

#### I.1. Loi uniforme.

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle suivant la loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

- Rappeler l'espérance de  $X$  et calculer sa variance.
- Calculer le kurtosis de  $X$ .
- En utilisant le préliminaire, déterminer le kurtosis pour une loi uniforme sur  $[a, b]$  (avec  $a$  et  $b$  réels et  $a < b$ ).

#### I.2. Loi normale.

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

- Montrer que  $X$  admet un moment centré d'ordre  $n$  pour tout entier naturel  $n$ .
- Pour tout entier naturel  $n$ , établir la relation  $\mu_{n+2}(X) = (n+1)\mu_n(X)$ .
- Montrer que le kurtosis de  $X$  est nul.
- Que vaut le kurtosis pour une loi normale de paramètres quelconques ?

#### I.3. Loi de Bernoulli.

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ .

- Calculer le kurtosis de  $X$  en fonction de  $p$ .
- Montrer que  $K(X)$  est minimum pour  $p = \frac{1}{2}$  et déterminer la valeur minimale.

### Partie II. Minoration du kurtosis

**II.1.** Soit  $Y$  une variable aléatoire admettant une variance. Montrer  $\mathbb{E}(Y^2) \geq \mathbb{E}(Y)^2$ .

**II.2.** Montrer que le kurtosis d'une variable aléatoire, s'il est défini, est toujours supérieur ou égal à  $-2$ .

**II.3.** Soient  $a$  et  $b$  deux réels distincts. On suppose que  $X$  suit la loi uniforme sur  $\{a, b\}$ , autrement dit que  $\mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(X = b) = \frac{1}{2}$ . Vérifier que  $K(X) = -2$ .

**II.4.** On se propose de montrer la réciproque de ce résultat. Soit  $X$  une variable aléatoire admettant un kurtosis égal à  $-2$ .

- Montrer que la variable  $(X - \mathbb{E}(X))^2$  suit une loi certaine.
- En déduire que  $\mathbb{P}(X = x)$  est non nulle uniquement pour deux valeurs réelles de  $x$  que l'on notera  $a$  et  $b$ .

c. Montrer que  $X$  suit la loi uniforme sur  $\{a, b\}$ .

II.5. Existe-t-il une majoration du kurtosis, c'est-à-dire un réel  $M$  tel que  $K(X) \leq M$  pour toute variable  $X$  admettant un kurtosis?

### Partie III. Somme de variables

III.1. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes, centrées, admettant un kurtosis.

$$\text{Montrer : } \mathbb{E}\left((X+Y)^4\right) = \mathbb{E}\left(X^4\right) + 6\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y) + \mathbb{E}\left(Y^4\right).$$

III.2. Établir la formule :  $K(X+Y) = \frac{\mathbb{V}(X)^2 K(X) + \mathbb{V}(Y)^2 K(Y)}{[\mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)]^2}$ .

III.3. Montrer que cette formule est encore valable pour des variables  $X$  et  $Y$  indépendantes mais non nécessairement centrées.

III.4. Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , montrer que si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont  $n$  variables aléatoires mutuellement indépendantes, chacune admettant un kurtosis, alors

$$K\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{\sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k)^2 K(X_k)}{\left(\sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k)\right)^2}.$$

III.5. Soient  $X$  une variable admettant un kurtosis, et  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi que  $X$ . On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ .

a. Établir :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} K(S_n) = 0$ .

b. Interpréter ce résultat, en commençant par rappeler l'énoncé du théorème central limite.

## Problème 2 - EM Lyon 2010

### Définitions et notations

- $p$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
- On note  $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices-lignes à  $p$  colonnes à coefficients réels,  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $p$  à coefficients réels,  $I_p$  la matrice diagonale de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1.
- On note, pour toute matrice carrée  $A$  d'ordre  $p$  et tout  $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$ ,  $(A)_{i,j}$  le coefficient de  $A$  situé à la ligne  $i$  et à la colonne  $j$ .
- On note, pour toute matrice-ligne  $L$  de  $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$  et tout  $j \in \{1, \dots, p\}$ ,  $(L)_j$  le coefficient de  $L$  situé à la colonne  $j$ .
- On dit qu'une suite de matrices  $(A_n)_{n \geq 1}$  de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  converge vers une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ , et on note  $A_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} A$ , si et seulement si :  $\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, (A_n)_{i,j} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} (A)_{i,j}$ .
- On dit qu'une suite de matrices  $(L_n)_{n \geq 1}$  de  $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$  converge vers une matrice  $L$  de  $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ , et on note  $L_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} L$ , si et seulement si :  $\forall j \in \{1, \dots, p\}, (L_n)_j \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} (L)_j$ .
- On admet que, si la suite  $(A_n)_{n \geq 1}$  de matrices de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  converge vers la matrice  $A$  et si la suite de matrice  $(B_n)_{n \geq 1}$  de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  converge vers la matrice  $B$ , alors la suite  $(A_n B_n)_{n \geq 1}$  converge vers la matrice  $AB$ .
- On admet que si la suite  $(A_n)_{n \geq 1}$  de matrices de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  converge vers la matrice  $A$  et si  $L$  est une matrice-ligne de  $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ , alors la suite  $(L A_n)_{n \geq 1}$  de matrices converge vers  $LA$ .

- On appelle matrice stochastique toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  telle que : 
$$\begin{cases} \forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, (A)_{i,j} \geq 0 \\ \forall i \in \{1, \dots, p\}, \sum_{j=1}^p (A)_{i,j} = 1, \end{cases}$$

et on note  $\mathcal{ST}_p$  l'ensemble des matrices stochastiques de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .

### Partie I : Résultats généraux sur les matrices stochastiques - Illustrations

1. *a.* On note  $V$  la matrice-colonne à  $p$  lignes dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Montrer que, pour tout  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  :  $A \in \mathcal{ST}_p \iff \begin{cases} \forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, (A)_{i,j} \geq 0 \\ AV = V. \end{cases}$

*b.* En déduire que toutes les matrices de  $\mathcal{ST}_p$  ont une valeur propre commune.

2. Démontrer :  $\forall A, B \in \mathcal{ST}_p, AB \in \mathcal{ST}_p$ .

3. On note :  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ .

*a.* Justifier, sans calcul, que  $A_1$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . Donner la dimension du sous-espace propre pour  $A_1$  associé à la valeur propre 1.

*b.* En utilisant éventuellement les matrices  $A_2$  et  $A_3$  :

i. Montrer qu'il existe dans  $\mathcal{ST}_3$  au moins un élément non diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  ;

ii. Justifier si l'affirmation suivante est vraie ou fausse : « Pour tout élément  $A$  de  $\mathcal{ST}_3$ , le sous-espace propre pour  $A$  associé à la valeur propre 1 est de dimension 1 ».

4. Soit  $A \in \mathcal{ST}_p$  et  $\lambda$  une valeur propre de  $A$  dans  $\mathbb{R}$ .

On note  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$  un vecteur propre pour  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

On note  $i$  un élément de  $\{1, \dots, p\}$  tel que :  $\forall k \in \{1, \dots, p\}, |x_k| \leq |x_i|$ .

*a.* Montrer :  $|\lambda x_i| \leq |x_i|$ .

*b.* En déduire :  $|\lambda| \leq 1$ .

### Partie II : Suites de moyennes de puissances de matrices stochastiques

Soit  $A \in \mathcal{ST}_p$ . On jote  $A^0 = I_p$ .

5. *a.* Établir :  $\forall n \in \mathbb{N}, A^n \in \mathcal{ST}_p$ .

*b.* Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} A^k \in \mathcal{ST}_p$ .

Dans la suite de cette partie II, on suppose qu'il existe  $r \in \{1, \dots, p-1\}$ ,  $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  inversible,  $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  diagonale dont tous les coefficients diagonaux  $(D)_{i,i}$  sont égaux à 1 si  $i \leq r$  et distincts de 1 si  $i \geq r+1$ , tels que :  $A = PDP^{-1}$ .

On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D^k$  et  $B_n = PM_nP^{-1}$ .

On note  $\Delta$  la matrice de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  diagonale dont les coefficients diagonaux  $(\Delta)_{i,i}$  sont égaux à 1 si  $i \leq r$  et nuls sinon, et on note  $B = P\Delta P^{-1}$ .

6. Démontrer, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  fixé tel que  $|x| \leq 1$  :  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \neq 1. \end{cases}$

7. Montrer :  $M_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Delta$ , et en déduire :  $B_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} B$ .

8. *a.* Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n \in \mathcal{ST}_p$ .

*b.* En déduire :  $B \in \mathcal{ST}_p$ .

### Partie III : Aspect probabiliste

On dispose d'un objet noté  $T$  et de trois urnes numérotées 1, 2 et 3.

À chaque instant  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $T$  est dans une des trois urnes et une seule.

On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n$  la variable aléatoire égale au numéro de l'urne dans laquelle se trouve l'objet à l'instant  $n$  et  $L_n$  la matrice suivante de  $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$  :  $L_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) & \mathbb{P}(X_n = 2) & \mathbb{P}(X_n = 3) \end{pmatrix}$ .

On suppose connues la loi de  $X_0$  et la matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  définie par :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2, (A)_{i,j} = \mathbb{P}_{(X_0=i)}(X_1 = j).$$

On suppose :  $\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2, \mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j) = \mathbb{P}_{(X_0=i)}(X_1 = j)$ .

9. Montrer :  $A \in \mathcal{ST}_3$ .

10. Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, L_{n+1} = L_n A$  puis :  $\forall n \in \mathbb{N}, L_n = L_0 A^n$ .

On suppose dorénavant  $A = A_1$ , définie dans la partie I.3, et on note  $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ .

11. Déterminer une matrice  $P_1 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , inversible et à coefficients diagonaux tous égaux à 1, telle que  $A_1 = P_1 D_1 P_1^{-1}$  et calculer  $P_1^{-1}$ .

12. Déterminer la limite de la suite  $(D_1^n)_{n \geq 1}$ , puis la limite de la suite  $(A_1^n)_{n \geq 1}$ .

13. Déterminer la limite de la suite  $(L_n)_{n \geq 1}$ . Expliquer ce résultat par des arguments probabilistes.