ANNEXE

B

FORME QUADRATIQUE ASSOCIÉE À UNE MATRICE

Définition B-1

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

La ***forme quadratique associée à*** A est l'application définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$q(\mathbf{h}) = {}^t\mathrm{HAH}$$

où H est la matrice des coordonnées de $\mathbf{h}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. La forme quadratique associée est définie pour tout $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ par :

Remarques

1 ▹ En généralisant le calcul précédent, on obtient pour $\mathrm{A} = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $\mathbf{h} = (h_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$:

$$q(\mathbf{h}) = \sum_{i,j\in[[1;n]]} a_{ij}h_ih_j.$$

D'où par symétrie de A :

$$q(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}h_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}h_ih_j.$$

En particulier, si A est diagonale, avec $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sur la diagonale, alors :

$$q(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i^2.$$

2 ▹ Soit φ un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ et A la matrice de φ dans la base canonique. La forme quadratique q associée à A est donnée par :

$$\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n,\ q(\mathbf{h}) = \langle \mathbf{h}, \varphi(\mathbf{h})\rangle.$$

Proposition B-2 (expression de la forme quadratique dans une b.o.n.)

Soit q la forme quadratique associée à une matrice symétrique A.

Il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que, si $\mathbf{h}$ a pour coordonnées $\tilde{h_1}, \ldots, \tilde{h_n}$ dans $\mathscr{B}$, alors :

$$q(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{h}_i^2$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A .

Démonstration

Remarques

1 ▹ ***Encadrement de Rayleigh***

Notons respectivement α et β la plus petite et la plus grande valeur propre de A.

D'après ce qui précède :

$$q(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{h}_i^2 \quad \text{donc} \quad \alpha \sum_{i=1}^{n} \tilde{h}_i^2 \leqslant q(\mathbf{h}) \leqslant \beta \sum_{i=1}^{n} \tilde{h}_i^2$$

et on a (dans une b.o.n.) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \tilde{h}_i{}^2 = \|\mathbf{h}\|^2$ donc :

$$\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},\ \alpha \leqslant \frac{q(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^2} \leqslant \beta.$$

2 ▹ Quel lien y a-t-il entre le spectre de A et le signe de q ?