

**Exercice 1 – d’après EDHEC 2007**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} dx$ .

1. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est bien définie.

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose alors  $v_n = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} dx$  et  $w_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} dx$ .

a. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq w_n \leq \frac{1}{e}$ .

b. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \geq \frac{1}{e} \ln(n+1)$ .

c. Donner la limite de la suite  $(u_n)$ .

3. On se propose de déterminer un équivalent de  $u_n$  lorsque  $n$  est au voisinage de  $+\infty$ .

a. Montrer que l’intégrale  $I = \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx$  est une intégrale convergente.

b. Établir que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} dx \leq I$ .

c. En déduire un encadrement de  $v_n$  valable pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

d. Donner enfin, en utilisant cet encadrement, un équivalent simple de  $u_n$ .

CORRECTION —

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $x \mapsto \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}}$  est continue sur  $[0, +\infty[$  donc son intégrale sur  $[0, 1]$  existe. De plus :

$$\forall x \geq 1, 0 \leq \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} \leq e^{-x}$$

et l’intégrale  $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$  converge.

D’après le critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, l’intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} dx$  converge.

Donc le réel  $u_n$  existe.

Donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est bien définie.

2. a. On a :

$$\forall x \geq 1, 0 \leq \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} \leq e^{-x}$$

donc, par croissance de l’intégrale sur  $[1, +\infty[$  et puisque toutes ces intégrales sont convergentes, on a :

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} dx \leq \int_1^{+\infty} e^{-x} dx.$$

D’autre part :

$$\int_1^A e^{-x} dx = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^A} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{e}$$

donc :

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} dx \leq \frac{1}{e}.$$

Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq w_n \leq \frac{1}{e}.$$

b. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Par décroissance de la fonction  $t \mapsto e^{-t}$  sur  $[0, 1]$ , on a pour tout réel  $x$  :

$$e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1 \quad \text{donc} \quad \frac{1}{e(x + \frac{1}{n})} \leq \frac{e^{-x}}{(x + \frac{1}{n})}$$

puis, par croissance de l’intégrale sur  $[0, 1]$  et puisque toutes ces intégrales existent, on a :

$$\int_0^1 \frac{1}{e(x + \frac{1}{n})} dx \leq \int_0^1 \frac{e^{-x}}{(x + \frac{1}{n})} dx$$

donc :

$$\frac{1}{e} \left[ \ln \left( x + \frac{1}{n} \right) \right]_0^1 \leq v_n$$

donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \geq \frac{1}{e} \ln(n+1).$$

c. Les questions précédentes montrent que la suite  $w$  est bornée et, par théorème de minoration, que la suite  $v_n$  diverge vers  $+\infty$ .

Puisque  $u_n = v_n + w_n$  pour tout entier  $n \geq 1$ , on en déduit :

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.}$$

3. a. La fonction  $x \mapsto e^{-x}$  est dérivable en 0 et son nombre dérivé vaut -1 donc :

$$\frac{1 - e^{-x}}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$$

Par ailleurs, la fonction  $x \mapsto \frac{1 - e^{-x}}{x}$  est un quotient de fonctions continues et le dénominateur ne s'annule pas sur  $]0, 1]$  donc cette fonction est continue sur  $]0, 1]$ .

Donc cette fonction se prolonge par continuité en 0 et le prolongement obtenu est continu sur  $[0, 1]$ . Donc son intégrale sur ce segment existe.

Donc l'intégrale  $I = \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx$  est convergente.

b. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout réel  $x \in ]0, 1]$ , on a :

$$e^{-x} \leq e^0 = 1 \text{ et } 0 \leq x \leq x + \frac{1}{n}$$

donc :

$$0 \leq \frac{1 - e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} \leq \frac{1 - e^{-x}}{x}.$$

Par croissance de l'intégrale sur  $]A, 1]$  (où  $A \in ]0, 1]$ ), on a :

$$0 \leq \int_A^1 \frac{1 - e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} dx \leq \int_A^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx$$

Les deux intégrales convergent lorsque A tend vers 0 donc pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} dx \leq I.$$

c. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On en déduit que :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{1}{x + \frac{1}{n}} dx - v_n \leq I$$

donc :

$$v_n \leq \int_0^1 \frac{1}{x + \frac{1}{n}} dx = \left[ \ln \left( x + \frac{1}{n} \right) \right]_0^1 = \ln(n+1) \leq v_n + I$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) - I \leq v_n \leq \ln(n+1).$$

d. La suite  $(\ln(n+1))_{n \geq 1}$  est strictement positive donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 - \frac{I}{\ln(n+1)} \leq \frac{v_n}{\ln(n+1)} \leq 1.$$

Les termes latéraux convergent vers 1 donc par le théorème d'encadrement :

$$\frac{v_n}{\ln(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

On a donc  $v_n \underset{+\infty}{\sim} o(v_n)$ .

## Exercice 2 – d'après EDHEC 2023

On désigne par  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on considère un endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  dont la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  est une matrice  $M$  telle que  $\text{rg}(M) = 1$ .

On note  $C$  la première colonne de  $M$  et on suppose que  $C$  est non nulle.

1. Donner la dimension de  $\text{Ker}(f)$  et en déduire une valeur propre de  $f$ .
2. **a.** Montrer qu'il existe une matrice  $L = (\ell_1 \ \ell_2 \ \dots \ \ell_n)$  appartenant à  $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$  telle que  $M = CL$ .  
**b.** On rappelle que  $\text{tr}(M)$  désigne la trace de la matrice  $M$ . Montrer que  $\text{tr}(M) = LC$ .  
**c.** Établir que l'on a l'égalité :

$$M^2 = \text{tr}(M)M$$

3. Montrer que  $\text{tr}(M)$  est valeur propre de  $f$ .
4. On suppose que  $\text{tr}(M) = 0$ . Montrer que  $M$  n'est pas diagonalisable.
5. On suppose que  $\text{tr}(M) \neq 0$ . À l'aide des questions précédentes, déterminer les valeurs propres de  $f$  et montrer que  $f$  est diagonalisable.

On désigne par  $a, b, c$  trois réels non nuls et on considère l'endomorphisme  $g$  de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/b \\ a & 1 & 1/c \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$ .

On suppose que  $A$  n'est pas inversible.

6. **a.** En considérant le système  $AX = 0$ , où  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , établir, en raisonnant par l'absurde, la relation  $ac = b$ .  
**b.** En déduire le rang de  $A$ .
7. **a.** Conclure que  $g$  est diagonalisable et donner ses valeurs propres.  
**b.** Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $A^n$  appartient à  $\text{Vect}(A)$ .

CORRECTION —

- 1 On sait que  $\text{rg}(f) = \text{rg}(M) = 1$ . D'après le théorème du rang, on a donc :

$$\dim \text{Ker}(f) = \dim(\mathbb{R}^n) - \text{rg}(f) = \boxed{n-1}$$

Comme  $n \geq 2$ , on a  $n-1 \geq 1$ .

Donc  $\boxed{0}$  est valeur propre de  $f$  et la dimension du sous-espace propre associé est  $n-1$ .

- 2 **a.** La matrice  $M$  est de rang 1 et sa première colonne (notée  $C$ ) est non-nulle. Donc toutes les colonnes de  $M$  sont proportionnelles à  $C$ . Il existe donc des réels  $\ell_2, \dots, \ell_n$  tels que :

$$M = \left( C \mid \ell_2 C \mid \dots \mid \ell_n C \right) = C \times \begin{pmatrix} 1 & \ell_2 & \dots & \ell_n \end{pmatrix}$$

En notant  $\ell_1 = 1$  et  $L = (\ell_1 \ \ell_2 \ \dots \ \ell_n)$ , on a bien  $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$  et :

$$\boxed{M = CL}$$

- b.** On note  $c_1, \dots, c_n$  les coefficients de la matrice  $C$ , autrement dit :

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$M = CL = \begin{pmatrix} \ell_1 c_1 & \dots & \ell_n c_1 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \ell_1 c_n & \dots & \ell_n c_n \end{pmatrix}$$

La trace d'une matrice est la somme de ses coefficients diagonaux. Donc :

$$\text{Tr}(M) = \ell_1 c_1 + \dots + \ell_n c_n = \sum_{k=1}^n \ell_k c_k$$

D'autre part :

$$LC = \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \dots & \ell_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \ell_k c_k$$

On a donc bien :  $\boxed{\text{Tr}(M) = LC}$

**c.** On a :

$$\begin{aligned} M^2 &= (CL)^2 \\ &= CLCL \\ &= C \times LC \times L \\ &= LC \times C \times L \quad (\text{LC est un réel}) \\ &= \boxed{\text{Tr}(M)M} \quad (\text{car } LC = \text{Tr}(M) \text{ et } CL = M) \end{aligned}$$

3 On a :

$$M \times C = CL \times C = C \times LC = LC \times C = \text{Tr}(M) \times C$$

De plus, la matrice colonne  $C$  n'est pas nulle. Ceci prouve que  $\text{Tr}(M)$  est valeur propre de  $M$  et que  $C$  est un vecteur propre associé.

Enfin, l'endomorphisme  $f$  et la matrice  $M$  ont les mêmes valeurs propres. Bilan :  $\text{Tr}(M)$  est valeur propre de  $f$

4 Si  $\text{Tr}(M) = 0$ , alors l'égalité de la question 2.c devient :

$$M^2 = 0 \quad (\text{matrice nulle})$$

et donc :

$$f^2 = 0 \quad (\text{endomorphisme nul})$$

Donc  $P(x) = x^2$  est un polynôme annulateur de  $f$ . D'après le cours, les seules valeurs propres possibles de  $f$  sont les racines du polynôme  $P$ . Ici la seule racine de  $P$  est 0. Or, on a déjà établi en question 1 que 0 est valeur propre de  $f$ . On en déduit que

$$0 \text{ est la seule valeur propre de } f$$

De plus, on a :

$$\underbrace{\dim \text{Ker}(f)}_{n-1} < \underbrace{\dim(\mathbb{R}^n)}_n$$

On en déduit que l'endomorphisme  $f$  n'est pas diagonalisable. Donc la matrice  $M$  n'est pas diagonalisable

5 Si  $\text{Tr}(M) \neq 0$  alors on a :

$$M^2 - \text{Tr}(M)M = 0 \quad \text{donc} \quad f^2 - \text{Tr}(M)f = 0$$

Donc le polynôme  $Q(x) = x^2 - \text{Tr}(M)x$  est annulateur de  $f$ . On en déduit, comme à la question précédente, que les seules valeurs propres possibles de  $f$  sont les racines de  $Q$  : 0 et  $\text{Tr}(M)$ . Or :

— On a vu en 1) que 0 est bien valeur propre de  $f$  avec pour dimension du sous-espace propre associé :

$$\dim \text{Ker}(f) = n - 1$$

—  $\text{Tr}(M) \neq 0$  et on a vu en 3) que  $\text{Tr}(M)$  est bien valeur propre de  $f$ .

Bilan :

$$\text{les valeurs propres de } f \text{ sont } 0 \text{ et } \text{Tr}(M)$$

Enfin, comme la somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égal à celle de  $\mathbb{R}^n$ , on a :

$$\dim \text{Ker}(f - \text{Tr}(M)\text{Id}) = 1$$

et donc :

$$\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Ker}(f - \text{Tr}(M)\text{Id}) = \dim \mathbb{R}^n$$

Ceci prouve que  $f$  est diagonalisable

6 a. On suppose que  $ac \neq b$ . On a :

$$AX = 0 \iff \begin{cases} x + \frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 0 \\ ax + y + \frac{z}{c} = 0 \\ bx + cy + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + \frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 0 \\ \left(\frac{1}{c} - \frac{a}{b}\right)z = 0 \\ \left(c - \frac{b}{a}\right)y = 0 \end{cases}$$

Par hypothèse  $ac \neq b$  donc  $\left(\frac{1}{c} - \frac{a}{b}\right) \neq 0$  et  $\left(c - \frac{b}{a}\right) \neq 0$ .

On a donc :

$$AX = 0 \iff \begin{cases} x + \frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

On a donc établi l'équivalence suivante :

$$AX = 0 \iff X = 0$$

On en déduit que la matrice  $A$  est inversible, ce qui contredit l'énoncé. Donc l'hypothèse de départ  $ac \neq b$  est fautive. On a bien démontré par l'absurde que

$$ac = b$$

b. On ré-écrit la matrice  $A$  en remplaçant  $b$  par  $ac$  :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/ac \\ a & 1 & 1/c \\ ac & c & 1 \end{pmatrix}$$

En notant  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  les colonnes de la matrice  $A$ , on remarque que  $C_1$  est non-nulle,  $C_2 = \frac{1}{a}C_1$  et  $C_3 = \frac{1}{ac}C_1$ .

On en déduit que le rang de la matrice  $A$  vaut 1. On peut donc appliquer à la matrice  $A$  les résultats établis en partie 1 sur la matrice  $M$ .

7 a. D'après la question précédente, la matrice  $A$  est de rang 1. De plus :  $\text{Tr}(A) = 3 \neq 0$ . D'après la question 5, on en déduit que  $g$  est diagonalisable et

que les valeurs propres de  $g$  sont 0 et 3

D'après la question 2.c on a :

$$A^2 = \text{Tr}(A)A \quad \text{donc} \quad A^2 = 3A$$

On montre alors que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $A^n = 3^{n-1}A$ . On raisonne par récurrence sur  $n$ .

**Initialisation.** Pour  $n = 1$  on a :

$$A^1 = A$$

et

$$3^{n-1}A = 3^0A = A$$

On a donc bien :  $A^n = 3^{n-1}A$ .

**Hérédité.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que :

$$A^n = 3^{n-1}A$$

Montrons que :

$$A^{n+1} = 3^n A$$

On a :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= 3^{n-1}A \times A \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= 3^{n-1}A^2 \\ &= 3^{n-1} \times 3A \\ &= 3^n A \end{aligned}$$

Ceci achève la récurrence. On a donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $A^n = 3^{n-1}A$  donc  $A^n \in \text{Vect}(A)$

### Exercice 3 – d’après EDHEC 2011

On considère un entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2. On dispose d’une urne contenant  $2n$  boules numérotées de 1 à  $n$ , chaque boule apparaissant deux fois. On effectue « au hasard » une succession de tirages simultanés de deux boules de cette urne selon le protocole suivant :

- à chaque tirage de deux boules, si les deux boules tirées portent le même numéro, on ne remet pas les deux boules dans l’urne et on dit qu’une paire est constituée,
- si les deux boules tirées portent des numéros différents, on les remet dans l’urne avant de procéder au tirage suivant.

Pour tout élément  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et tout entier naturel  $k$  non nul, on pose  $T_i = k$  si  $k$  tirages exactement ont été nécessaires pour constituer  $i$  paires.

On admet qu’il existe un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  permettant de modéliser cette expérience et que, pour tout entier  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $T_i$  est une variable aléatoire définie sur cet espace.

1. *a.* Déterminer la loi de  $T_1$  et reconnaître cette loi.  
*b.* Donner, sans calcul, la valeur de l’espérance de  $T_1$ .
2. Écrire une fonction Python qui simule la variable  $T_1$ .
3. On pose  $X_1 = T_1$  et pour tout  $i$  de  $\llbracket 2, n \rrbracket$  :  $X_i = T_i - T_{i-1}$ .  
*a.* Que représente la variable  $X_i$  ?  
*b.* Déterminer, pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  la loi de  $X_i$  ainsi que son espérance.  
*c.* En déduire que  $T_n$  admet une espérance et que  $\mathbb{E}(T_n) = n^2$ .
4. On effectue une suite de  $n$  tirages de deux boules selon le protocole précédent.  
 On note  $S_n$  la variable aléatoire égale au nombre de paires reconstituées lors de ces  $n$  tirages.  
*a.* Calculer  $\mathbb{P}(S_n = 0)$ .  
*b.* Déterminer la limite en  $+\infty$  de  $\mathbb{P}(S_n = 0)$ .  
*c.* Montrer que :  $\mathbb{P}(S_n = n) = \frac{n!2^n}{(2n)!}$ .
5. Écrire une fonction Python qui simule la variable  $S_n$ .

CORRECTION —

- 1 *a.* On a  $T_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ .  
 Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout entier naturel  $i$  non nul, notons  $E_i$  l’événement « le  $i$ -ème tirage amène une paire de boules ayant le même numéro ». Alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[T_1 = k] &= \mathbb{P}(\bar{E}_1 \cap \dots \cap \bar{E}_{k-1} \cap E_k) \\ &= \mathbb{P}(\bar{E}_1) \times \mathbb{P}_{\bar{E}_1}(\bar{E}_2) \times \dots \times \mathbb{P}_{\bar{E}_1 \cap \dots \cap \bar{E}_{k-2}}(\bar{E}_{k-1}) \\ &\quad \times \mathbb{P}_{\bar{E}_1 \cap \dots \cap \bar{E}_{k-1}}(E_k) \end{aligned}$$

Tant que l’on n’a pas obtenu de paire, la composition de l’urne ne change pas donc :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}_{\bar{E}_1 \cap \dots \cap \bar{E}_{k-i}}(\bar{E}_i) = \mathbb{P}(\bar{E}_1)$$

Ainsi, on a :

$$\mathbb{P}[T_1 = k] = \mathbb{P}(\bar{E}_1)^{k-1} \times \mathbb{P}(E_1)$$

et l’on reconnaît une loi géométrique. De plus, on a :

$$\mathbb{P}(E_1) = \frac{\binom{n}{1}}{\binom{2n}{2}} = \frac{n}{\frac{(2n)(2n-1)}{2}} = \frac{1}{2n-1}$$

Donc  $T_1 \leftrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2n-1}\right)$ .

- b.* On en déduit que :  $\mathbb{E}(T_1) = 2n - 1$ .

- 2 Imaginons que  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  soient rouges et que les autres soient bleues. On peut imaginer tirer une première boule, par exemple rouge, puis en tirer une seconde parmi les  $n$  bleues et les  $n - 1$  rouges restantes. Une paire ne pouvant être constituée que si l’on tire alors une bleue. L’idée est de tirer un premier numéro (de façon équiprobable) entre 1 et  $n$ , puis d’en tirer un second entre 1 et  $2n - 1$  (en faisant comme si les boules bleues étaient alors celles de 1 à  $n$  et les rouges restantes étaient celles de  $n + 1$  à  $2n - 1$ ).

```
def tirage(n):
    a = rd.randint(1, n+1) # tirage entre 1 et n
    b = rd.randint(1, 2*n) # tirage entre 1 et 2n-1
    k = 1
    while a != b:
        a = rd.randint(1, n+1)
        b = rd.randint(1, 2*n)
        k += 1
    return k
```

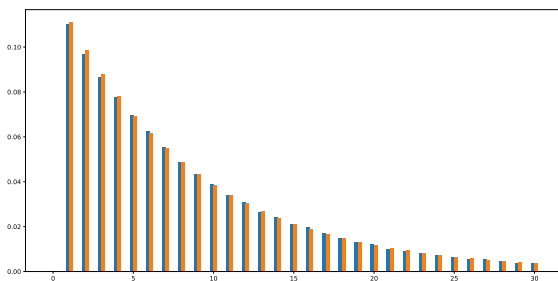
Pour comparer avec le résultat de la première question (ce n'était bien entendu pas demandé), on peut réaliser la simulation suivante :

```

N = 100000
n = 5
p = 1/(2*n-1)
t = [0 for k in range(31)]
for _ in range(N):
    r = tirage(n)
    if r <= 30:
        t[r] += 1/N
g = [0, p]
for k in range(2, 31):
    g.append(g[-1]*(1-p))
Xg = [k-0.1 for k in range(31)]
Xd = [k+0.1 for k in range(31)]
plt.bar(Xg, t, width=0.2)
plt.bar(Xd, g, width=0.2)
plt.show()

```

On obtient par exemple :



- 3 a. La variable aléatoire  $X_i$  compte le nombre de tirages effectués entre l'obtention de la paire  $i-1$  et la paire  $i$  c'est-à-dire le nombre de tirages effectués pour obtenir une paire une fois obtenu  $i-1$  paires.
- b. Il s'agit de la situation de la loi de la variable aléatoire  $T_1$  avec seulement  $n-(i-1)$  paires donc :

$$X_i \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2(n-i+1)-1}\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X_i) = 2(n-i+1) - 1.$$

c. En posant  $T_0$  la variable certaine égale à 0, on a :

$$\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n [T_i - T_{i-1}] = T_n - T_0 = T_n$$

par télescopage. Par linéarité de l'espérance,  $T_n$  admet une espérance et, d'après le résultat de la question précédente, on en déduit que :

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{i=1}^n [2(n-i+1) - 1] = \sum_{i=1}^n [2i - 1] = 2 \frac{n(n+1)}{2} - n$$

Donc  $T_n$  admet une espérance et  $\mathbb{E}(T_n) = n^2$ .

- 4 a. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Par la même technique que celle de la question 1, on a :

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \mathbb{P}(\bar{E}_1 \cap \dots \cap \bar{E}_k) = \mathbb{P}(\bar{E}_1)^n$$

donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \left(\frac{2n-2}{2n-1}\right)^n.$$

b. Alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n = 0) &= \exp\left(n \ln\left(\frac{2n-2}{2n-1}\right)\right) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)\right) \\ &= \exp\left(n \left[-\frac{1}{2n-1} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right) \end{aligned}$$

d'où, par composition de limites :

$$\mathbb{P}(S_n = 0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{2}}.$$

c. Toujours par la technique de la question 1 :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n = n) &= \mathbb{P}(E_1) \times \mathbb{P}_{E_1}(E_2) \times \dots \times \mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}}(E_n) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{2(n-i+1)-1} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2i-1} \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{2i}{(2i-1)(2i)} = \frac{\left(\prod_{i=1}^n 2\right) \left(\prod_{i=1}^n i\right)}{\left(\prod_{i=1}^{2n} i\right)} \end{aligned}$$

$$\text{donc : } \mathbb{P}(S_n = n) = \frac{n! 2^n}{(2n)!}.$$

5

```

def S(n):
    k = 0
    m = n
    for i in range(n):
        a = rd.randint(1, m+1)
        b = rd.randint(1, 2*m)
        if a == b:
            k += 1
            m -= 1
    return k

```