Exercice 1 – d'après EDHEC 2007

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} dx$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien définie.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose alors $v_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} dx$ et $w_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} dx$.

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant w_n \leqslant \dfrac{1}{e}$.

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \geqslant \dfrac{1}{e} \ln(n+1)$.

c. Donner la limite de la suite (u_n).

3. On se propose de déterminer un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

a. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx$ est une intégrale convergente.

b. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} dx \leqslant I$.

c. En déduire un encadrement de v_n valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

d. Donner enfin, en utilisant cet encadrement, un équivalent simple de u_n.

Correction —

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto \frac{e^{-x}}{x+1/n}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc son intégrale sur $[0,1]$ existe. De plus :

$$\forall x \geqslant 1,\ 0 \leqslant \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} \leqslant e^{-x}$$

et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ converge.

D'après le critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x + 1/n} dx$ converge.

Donc le réel u_n existe.

Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est bien définie.}}$

2. *a.* On a :

$$\forall x \geqslant 1,\ 0 \leqslant \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} \leqslant e^{-x}$$

donc, par croissance de l'intégrale sur $[1, +\infty[$ et puisque toutes ces intégrales sont convergentes, on a :

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x + 1/n} dx \leqslant \int_1^{+\infty} e^{-x} dx.$$

D'autre part :

$$\int_1^A e^{-x} dx = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^A} \xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{1}{e}$$

donc :

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x + 1/n} dx \leqslant \frac{1}{e}.$$

Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant w_n \leqslant \frac{1}{e}.}$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par décroissance de la fonction $t \mapsto e^{-t}$ sur $[0,1]$, on a pour tout réel x :

$$e^{-1} \leqslant e^{-x} \leqslant 1 \quad \text{donc} \quad \frac{1}{e\left(x + \frac{1}{n}\right)} \leqslant \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}}$$

puis, par croissance de l'intégrale sur $[0,1]$ et puisque toutes ces intégrales existent, on a :

$$\int_0^1 \frac{1}{e\left(x + \frac{1}{n}\right)} dx \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\left(x + \frac{1}{n}\right)} dx$$

donc :

$$\frac{1}{e}\left[\ln\left(x + \frac{1}{n}\right)\right]_0^1 \leqslant v_n$$

donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \geqslant \frac{1}{e} \ln(n+1).}$$

c. Les questions précédentes montrent que la suite w est bornée et, par théorème de minoration, que la suite v_n diverge vers $+\infty$.

Puisque $u_n = v_n + w_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$, on en déduit :

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.}$$

3. ***a.*** La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est dérivable en 0 et son nombre dérivé vaut -1 donc :

$$\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1.$$

Par ailleurs, la fonction $x \mapsto \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}$ est un quotient de fonctions continues et le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,1]$ donc cette fonction est continue sur $]0,1]$.

Donc cette fonction se prolonge par continuité en 0 et le prolongement obtenu est continu sur $[0,1]$. Donc son intégrale sur ce segment existe.

Donc $\boxed{\text{l'intégrale } \mathrm{I} = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} \mathrm{d}x \text{ est convergente.}}$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel $x \in]0,1]$, on a :

$$\mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^0 = 1 \text{ et } 0 \leqslant x \leqslant x + \frac{1}{n}$$

donc :

$$0 \leqslant \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}.$$

Par croissance de l'intégrale sur $]\mathrm{A},1]$ (où $\mathrm{A} \in]0,1]$), on a :

$$0 \leqslant \int_{\mathrm{A}}^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathrm{A}}^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} \mathrm{d}x$$

Les deux intégrales convergent lorsque A tend vers 0 donc pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \mathrm{d}x \leqslant \mathrm{I}.}$$

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{1}{x+\frac{1}{n}} \mathrm{d}x - v_n \leqslant \mathrm{I}.$$

On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x+\frac{1}{n}} \mathrm{d}x &= \left[\ln\left(x+\frac{1}{n}\right)\right]_0^1 \\ &= \ln(n+1)\end{aligned}$$

donc :

$$0 \leqslant \ln(n+1) - v_n \leqslant \mathrm{I}$$

puis :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) - \mathrm{I} \leqslant v_n \leqslant \ln(n+1).}$$

d. La suite $(\ln(n+1))_{n \geqslant 1}$ est strictement positive donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 - \frac{\mathrm{I}}{\ln(n+1)} \leqslant \frac{v_n}{\ln(n+1)} \leqslant 1.$$

Les termes latéraux convergent vers 1 donc par le théorème d'encadrement :

$$\frac{v_n}{\ln(n+1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1.$$

Donc $v_n \sim \ln(n+1)$ *i.e.* $v_n \sim \ln(n)$.

La suite w est bornée et $u_n = v_n + w_n$ donc : $\boxed{u_n \sim \ln(n)}$.

Exercice 2 – d'après EDHEC 2023

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une matrice M telle que $\mathrm{rg}(\mathrm{M}) = 1$.
On note C la première colonne de M et on suppose que C est non nulle.

1. Donner la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ et en déduire une valeur propre de f.

2. ***a.*** Montrer qu'il existe une matrice $\mathrm{L} = (1\ \ell_2\ \dots\ \ell_n)$ appartenant à $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{M} = \mathrm{CL}$.

b. On rappelle que $\mathrm{tr}(\mathrm{M})$ désigne la trace de la matrice M. Montrer que $\mathrm{tr}(\mathrm{M}) = \mathrm{LC}$.

c. Établir que l'on a l'égalité :

$$\mathrm{M}^2 = \mathrm{tr}(\mathrm{M})\mathrm{M}$$

3. Montrer que $\mathrm{tr}(\mathrm{M})$ est valeur propre de f.

4. On suppose que $\mathrm{tr}(\mathrm{M}) = 0$. Montrer que M n'est pas diagonalisable.

5. On suppose que $\mathrm{tr}(\mathrm{M}) \neq 0$. À l'aide des questions précédentes, déterminer les valeurs propres de f et montrer que f est diagonalisable.

On désigne par a, b, c trois réels non nuls et on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/b \\ a & 1 & 1/c \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$.
On suppose que A n'est pas inversible.

6. ***a.*** En considérant le système $\mathrm{AX} = 0$, où $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, établir, en raisonnant par l'absurde, la relation $ac = b$.

b. En déduire le rang de A.

7. ***a.*** Conclure que g est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, A^n appartient à $\mathrm{Vect}(\mathrm{A})$.

Correction —

1. On sait que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(\mathrm{M}) = 1$. D'après le théorème du rang, on a donc :

$$\dim \mathrm{Ker}(f) = \dim(\mathbb{R}^n) - \mathrm{rg}(f) = \boxed{n-1}$$

Comme $n \geqslant 2$, on a $n - 1 \geqslant 1$.

Donc $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } f}$ et la dimension du sous-espace propre associé est $n-1$.

2. ***a.*** La matrice M est de rang 1 et sa première colonne (notée C) est non-nulle. Donc toutes les colonnes de M sont proportionnelles à C. Il existe donc des réels $\ell_2, \dots, \ell_n$ tels que :

$$\mathrm{M} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathrm{C} & \ell_2\mathrm{C} & \dots & \ell_n\mathrm{C} \end{array} \right) = \mathrm{C} \times \begin{pmatrix} 1 & \ell_2 & \dots & \ell_n \end{pmatrix}$$

En notant $\ell_1 = 1$ et $\mathrm{L} = \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \dots & \ell_n \end{pmatrix}$, on a bien $\mathrm{L} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et :

$$\boxed{\mathrm{M} = \mathrm{CL}}$$

b. On note $c_1, \dots, c_n$ les coefficients de la matrice C, autrement dit :

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\mathrm{M} = \mathrm{CL} = \begin{pmatrix} \ell_1 c_1 & \dots & \ell_n c_1 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \ell_1 c_n & \dots & \ell_n c_n \end{pmatrix}$$

La trace d'une matrice est la somme de ses coefficients diagonaux. Donc :

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{M}) = \ell_1 c_1 + \dots + \ell_n c_n = \sum_{k=1}^{n} \ell_k c_k$$

D'autre part :

$$\mathrm{LC} = \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \dots & \ell_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \ell_k c_k$$

On a donc bien : $\boxed{\mathrm{Tr}(\mathrm{M}) = \mathrm{LC}}$

c. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{M}^2 &= (\mathrm{CL})^2 \\ &= \mathrm{CLCL} \\ &= \mathrm{C} \times \mathrm{LC} \times \mathrm{L} \\ &= \mathrm{LC} \times \mathrm{C} \times \mathrm{L} \quad (\mathrm{LC} \text{ est un réel}) \\ &= \boxed{\mathrm{Tr}(\mathrm{M})\mathrm{M}} \quad (\text{car } \mathrm{LC} = \mathrm{Tr}(\mathrm{M}) \text{ et } \mathrm{CL} = \mathrm{M}) \end{aligned}$$

3. On a :

$$M \times C = CL \times C = C \times LC = LC \times C = \mathrm{Tr}(M) \times C$$

De plus, la matrice colonne C n'est pas nulle. Ceci prouve que Tr(M) est valeur propre de M et que C est un vecteur propre associé.
Enfin, l'endomorphisme f et la matrice M ont les mêmes valeurs propres donc $\boxed{\mathrm{Tr}(M) \text{ est valeur propre de } f.}$

4. Si $\mathrm{Tr}(M) = 0$, alors l'égalité de la question **2.c** devient :

$$M^2 = 0 \quad \text{(matrice nulle)}$$

et donc :

$$f^2 = 0 \quad \text{(endomorphisme nul)}$$

Donc $P(x) = x^2$ est un polynôme annulateur de f. D'après le cours, les seules valeurs propres possibles de f sont les racines du polynôme P. Ici la seule racine de P est 0. Or, on a déjà établi en question 1 que 0 est valeur propre de f. On en déduit que

$$\boxed{0 \text{ est la seule valeur propre de } f.}$$

De plus, on a :

$$\underbrace{\dim \mathrm{Ker}(f)}_{n-1} < \underbrace{\dim(\mathbb{R}^n)}_{n}.$$

On en déduit que l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable. Donc la matrice $\boxed{\text{M n'est pas diagonalisable}}$

5. Si $\mathrm{Tr}(M) \neq 0$ alors on a :

$$M^2 - \mathrm{Tr}(M)M = 0 \qquad \text{donc} \qquad f^2 - \mathrm{Tr}(M)f = 0$$

Donc le polynôme $Q(x) = x^2 - \mathrm{Tr}(M)x$ est annulateur de f. On en déduit, comme à la question précédente, que les seules valeurs propres possibles de f sont les racines de Q : 0 et Tr(M). Or :

— On a vu en 1) que 0 est bien valeur propre de f avec pour dimension du sous-espace propre associé :

$$\dim \mathrm{Ker}(f) = n - 1$$

— $\mathrm{Tr}(M) \neq 0$ et on a vu en 3) que Tr(M) est bien valeur propre de f.

Donc les valeurs propres de f sont $\boxed{0 \text{ et } \mathrm{Tr}(M).}$
Enfin, comme la somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égal à celle de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\dim \mathrm{Ker}\big(f - \mathrm{Tr}(M)\mathrm{Id}\big) = 1$$

donc :

$$\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Ker}\big(f - \mathrm{Tr}(M)\mathrm{Id}\big) = \dim \mathbb{R}^n.$$

Donc $\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$

6. ***a.*** On suppose que $ac \neq b$. On a :

$$AX = 0 \iff \begin{cases} x + \frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 0 \\ ax + y + \frac{z}{c} = 0 \\ bx + cy + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + \frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 0 \\ \left(\frac{1}{c} - \frac{a}{b}\right)z = 0 \\ \left(c - \frac{b}{a}\right)y = 0 \end{cases}$$

Par hypothèse $ac \neq b$ donc $\left(\frac{1}{c} - \frac{a}{b}\right) \neq 0$ et $\left(c - \frac{b}{a}\right) \neq 0$.
On a donc :

$$AX = 0 \iff \begin{cases} x + \frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

On a donc établi l'équivalence suivante :

$$AX = 0 \iff X = 0$$

On en déduit que la matrice A est inversible, ce qui contredit l'énoncé. Donc l'hypothèse de départ $ac \neq b$ est fausse. On a bien démontré par l'absurde que $\boxed{ac = b}$

b. On ré-écrit la matrice A en remplaçant b par ac :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/ac \\ a & 1 & 1/c \\ ac & c & 1 \end{pmatrix}$$

En notant C_1, C_2 et C_3 les colonnes de la matrice A, on remarque que C_1 est non-nulle, $C_2 = \frac{1}{a}C_1$ et $C_3 = \frac{1}{ac}C_1$.
On en déduit que le $\boxed{\text{rang de la matrice A vaut 1.}}$ On peut donc appliquer à la matrice A les résultats établis en partie 1 sur la matrice M.

7. ***a.*** D'après la question précédente, la matrice A est de rang 1. De plus : $\mathrm{Tr}(A) = 3 \neq 0$. D'après la question 5, on en déduit que $\boxed{g \text{ est diagonalisable}}$ et que les valeurs propres de g sont $\boxed{0 \text{ et } 3.}$

b. D'après la question **2.c** on a :

$$A^2 = \mathrm{Tr}(A)A \qquad \text{donc} \qquad A^2 = 3A$$

On montre alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $A^n = 3^{n-1}A$.
On raisonne par récurrence sur n.

Initialisation. Pour $n = 1$ on a :

$$A^1 = A$$

et

$$3^{n-1}A = 3^0 A = A$$

On a donc bien : $A^n = 3^{n-1}A$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

$$A^n = 3^{n-1}A$$

Montrons que :

$$A^{n+1} = 3^n A$$

On a :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= 3^{n-1}A \times A \quad \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= 3^{n-1}A^2 \\ &= 3^{n-1} \times 3A \\ &= 3^n A \end{aligned}$$

Ceci achève la récurrence. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $A^n = 3^{n-1}A$ donc $\boxed{A^n \in \mathrm{Vect}(A)}$

Exercice 3 – d'après EDHEC 2011

On considère un entier naturel n supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant $2n$ boules numérotées de 1 à n, chaque boule apparaissant deux fois. On effectue « au hasard » une succession de tirages simultanés de deux boules de cette urne selon le protocole suivant :

- à chaque tirage de deux boules, si les deux boules tirées portent le même numéro, on ne remet pas les deux boules dans l'urne et on dit qu'une paire est constituée,
- si les deux boules tirées portent des numéros différents, on les remet dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

Pour tout élément i de $[\![1,n]\!]$ et tout entier naturel k non nul, on pose $T_i = k$ si k tirages exactement ont été nécessaires pour constituer i paires.
On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ permettant de modéliser cette expérience et que, pour tout entier i de $[\![1,n]\!]$, T_i est une variable aléatoire définie sur cet espace.

1. ***a.*** Déterminer la loi de T_1 et reconnaitre cette loi.

b. Donner, sans calcul, la valeur de l'espérance de T_1.

2. Écrire une fonction Python qui simule la variable T_1.

3. On pose $X_1 = T_1$ et pour tout i de $[\![2,n]\!]$: $X_i = T_i - T_{i-1}$.

a. Que représente la variable X_i ?

b. Déterminer, pour tout i de $[\![1,n]\!]$ la loi de X_i ainsi que son espérance.

c. En déduire que T_n admet une espérance et que $\mathbb{E}(T_n) = n^2$.

4. On effectue une suite de n tirages de deux boules selon le protocole précédent.
On note S_n la variable aléatoire égale au nombre de paires reconstituées lors de ces n tirages.

a. Calculer $\mathbb{P}(S_n = 0)$.

b. Déterminer la limite en $+\infty$ de $\mathbb{P}(S_n = 0)$.

c. Montrer que : $\mathbb{P}(S_n = n) = \dfrac{n!2^n}{(2n)!}$.

5. Écrire une fonction Python qui simule la variable S_n.

Correction —

1. ***a.*** On a $T_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier naturel i non nul, notons E_i l'événement « le i-ème tirage amène une paire de boules ayant le même numéro ». Alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[T_1 = k] &= \mathbb{P}(\overline{E}_1 \cap \cdots \cap \overline{E}_{k-1} \cap E_k)\\ &= \mathbb{P}(\overline{E}_1) \times \mathbb{P}_{\overline{E}_1}(\overline{E}_2) \times \cdots \times \mathbb{P}_{\overline{E}_1\cap\cdots\cap\overline{E}_{k-2}}(\overline{E}_{k-1})\\ &\qquad \times \mathbb{P}_{\overline{E}_1\cap\cdots\cap\overline{E}_{k-1}}(E_k)\end{aligned}$$

Tant que l'on n'a pas obtenu de paire, la composition de l'urne ne change pas donc :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}_{\overline{E}_1\cap\cdots\cap\overline{E}_{k-i}}(\overline{E}_i) = \mathbb{P}(\overline{E}_1)$$

Ainsi, on a :

$$\mathbb{P}[T_1 = k] = \mathbb{P}(\overline{E}_1)^{k-1} \times \mathbb{P}(E_1)$$

et l'on reconnaît une loi géométrique. De plus, on a :

$$\mathbb{P}(E_1) = \frac{\binom{n}{1}}{\binom{2n}{2}} = \frac{n}{\frac{(2n)(2n-1)}{2}} = \frac{1}{2n-1}$$

Donc $\boxed{T_1 \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\dfrac{1}{2n-1}\right)}$.

b. On en déduit que : $\boxed{\mathbb{E}(T_1) = 2n-1}$.

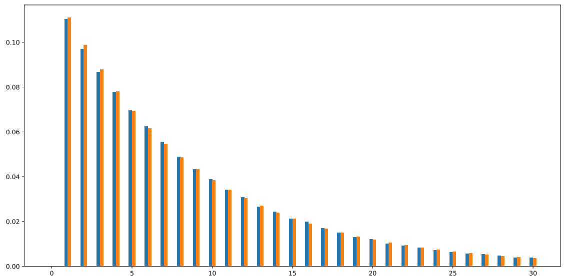
2. Imaginons que n boules numérotées de 1 à n soient rouges et que les autres soient bleues. On peut imaginer tirer une première boule, par exemple rouge, puis en tirer une seconde parmi les n bleues et les $n-1$ rouges restantes. Une paire ne pouvant être constituée que si l'on tire alors une bleue. L'idée est de tirer un premier numéro (de façon équiprobable) entre 1 et n, puis d'en tirer un second entre 1 et $2n-1$ (en faisant comme si les boules bleues étaient alors celles de 1 à n et les rouges restantes étaient celles de $n+1$ à $2n-1$.

```python
def tirage(n):
    a = rd.randint(1, n+1) # tirage entre 1 et
        n
    b = rd.randint(1, 2*n) # tirage entre 1 et
        2n-1
    k = 1
    while a != b:
        a = rd.randint(1, n+1)
        b = rd.randint(1, 2*n)
        k += 1
    return k
```

Pour comparer avec le résultat de la première question (ce n'était bien entendu pas demandé), on peut réaliser la simulation suivante :

```python
N = 100000
n = 5
p = 1/(2*n-1)
t = [0 for k in range(31)]
for _ in range(N):
    r = tirage(n)
    if r <= 30:
        t[r] += 1/N
g = [0, p]
for k in range(2, 31):
    g.append(g[-1]*(1-p))
Xg = [k-0.1 for k in range(31)]
Xd = [k+0.1 for k in range(31)]
plt.bar(Xg, t, width=0.2)
plt.bar(Xd, g, width=0.2)
plt.show()
```

On obtient par exemple :



3. ***a.*** La variable aléatoire X_i compte le nombre de tirages effectués entre l'obtention de la paire $i-1$ et la paire i c'est-à-dire le nombre de tirages effectués pour obtenir une paire une fois obtenu $i-1$ paires.

b. Il s'agit de la situation de la loi de la variable aléatoire T_1 avec seulement $n-(i-1)$ paires donc :

$$\boxed{X_i \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{1}{2(n-i+1)-1}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathbb{E}(X_i) = 2(n-i+1)-1}.$$

c. En posant T_0 la variable certaine égale à 0, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} [T_i - T_{i-1}] = T_n - T_0 = T_n$$

par télescopage. Par linéarité de l'espérance, T_n admet une espérance et, d'après le résultat de la question précédente, on en déduit que :

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{i=1}^{n} [2(n-i+1)-1] = \sum_{i=1}^{n} [2i-1] = 2\frac{n(n+1)}{2} - n$$

Donc $\boxed{T_n \text{ admet une espérance}}$ et $\boxed{\mathbb{E}(T_n) = n^2}$.

4. ***a.*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la même technique que celle de la question **1**, on a :

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \mathbb{P}(\overline{E}_1 \cap \cdots \cap \overline{E}_n) = \mathbb{P}(\overline{E}_1)^n$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\mathbb{P}(S_n = 0) = \left(\frac{2n-2}{2n-1}\right)^n}.$$

b. Alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n = 0) = \exp\left(n \ln\left(\frac{2n-2}{2n-1}\right)\right) &= \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)\right) \\ &= \exp\left(n\left[-\frac{1}{2n-1} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right)\end{aligned}$$

d'où, par composition de limites :

$$\boxed{\mathbb{P}(S_n = 0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\frac{1}{2}}}.$$

c. Toujours par la technique de la question **1** :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n = n) &= \mathbb{P}(E_1) \times \mathbb{P}_{E_1}(E_2) \times \cdots \times \mathbb{P}_{E_1 \cap \cdots \cap E_{n-1}}(E_n) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2(n-i+1)-1} \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1} \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{2i}{(2i-1)(2i)} \\ &= \frac{\left(\prod_{i=1}^{n} 2\right)\left(\prod_{i=1}^{n} i\right)}{\left(\prod_{i=1}^{2n} i\right)}\end{aligned}$$

donc : $\boxed{\mathbb{P}(S_n = n) = \frac{n!\, 2^n}{(2n)!}}$.

5.

```python
def S(n):
    k = 0
    m = n
    for i in range(n):
        a = rd.randint(1, m+1)
        b = rd.randint(1, 2*m)
        if a == b:
            k += 1
            m -= 1
    return k
```

Problème – d'après Ecricome 2008

L'objet du problème est la présentation d'une méthode probabiliste de calcul d'une intégrale (méthode de Monte-Carlo) et de deux façons de l'améliorer. Dans tout le problème, U désigne une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, g une fonction continue sur $[0,1]$ et on pose $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$.

L'espérance d'une variable aléatoire X sera notée $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ et sa variance $\mathbb{V}(\mathrm{X})$ (si elles existent).

On admet que, pour tout entier naturel non nul n, si $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n$ sont des variables aléatoires à densités, mutuellement indépendantes, alors des variables aléatoires de la forme $f_1(\mathrm{X}_1)$, $f_2(\mathrm{X}_2), \ldots, f_n(\mathrm{X}_n)$ où les f_i sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, distinctes ou non, sont également mutuellement indépendantes.

Partie 1 - Méthode de Monte-Carlo.

1. ***a.*** Rappeler une densité de U.
   b. Justifier que la variable aléatoire $g(\mathrm{U})$ admet une espérance égale à J.
2. Soit $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que U.
   On suppose que $\sigma^2 = \mathbb{V}\big(g(\mathrm{U})\big) \neq 0$ et on note pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} g(\mathrm{U}_i)$.
   a. Justifier que la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{\mathrm{S}_n}{n}\right)$ converge en probabilité vers J.
   b. Justifier que la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{\frac{\mathrm{S}_n}{n} - \mathrm{J}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.
   c. On considère pour « n suffisamment grand » que $\dfrac{\frac{\mathrm{S}_n}{n} - \mathrm{J}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
   On donne $\Phi(1,96) = 0,975$ où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
   Déterminer un intervalle de confiance pour J, au niveau de confiance 95%, faisant intervenir S_n.
3. *Application :*
   a. À l'aide du changement de variable $t = \sin(u)$, montrer que $\displaystyle\int_0^1 4\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \pi$.
   b. Écrire, en langage Python, une fonction `G`, de paramètre `t`, qui pour une valeur t du paramètre renvoie la valeur $4\sqrt{1-t^2}$.
   c. On rappelle qu'en langage Python, l'instruction `rd.random()` permet de simuler une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1[$. En utilisant le résultat de la question 2 et la fonction `G`, écrire une fonction `approx_pi` (de paramètre `n`) qui calcule une valeur approchée de π.

Partie 2 - Réduction de la variance par variables antithétiques.

4. Reconnaître la loi de $1 - \mathrm{U}$.
   On définit la variable aléatoire Y par $\mathrm{Y} = \dfrac{1}{2}(g(\mathrm{U}) + g(1-\mathrm{U}))$. Déterminer l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(\mathrm{Y})$.
5. On suppose g strictement croissante et on admet l'existence des espérances intervenant dans cette question.
   a. Justifier que, pour tout $(u,w) \in [0,1]^2$,
   $$\big(g(u) - g(w)\big)\big(g(1-u) - g(1-w)\big) \leqslant 0.$$
   b. Soit W une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, indépendante de U.
   Quel est le signe de $\mathbb{E}\left((g(\mathrm{U}) - g(\mathrm{W}))(g(1-\mathrm{U}) - g(1-\mathrm{W}))\right)$?
   c. En déduire que : $\mathbb{E}\left(g(\mathrm{U})g(1-\mathrm{U})\right) \leqslant \left(\mathbb{E}\left(g(\mathrm{U})\right)\right)^2$.
   On admet que l'on obtiendrait le même résultat pour g strictement décroissante.
   d. Montrer alors que, lorsque g est strictement monotone : $\mathbb{V}(\mathrm{Y}) \leqslant \dfrac{1}{2}\mathbb{V}\big(g(\mathrm{U})\big)$.
6. ***a.*** Donner un nouvel intervalle de confiance pour J au niveau de confiance 95%, fondé sur cette méthode.
   b. Fixons n et notons ℓ_n la longueur de l'intervalle de confiance obtenu dans la partie **I**.
   Notons ℓ'_{N} la longueur trouvée à la question précédente pour N tirages de la variable aléatoire uniforme. Quelle condition suffit-il que N vérifie pour avoir $\ell'_{\mathrm{N}} \leqslant \ell_n$?

Partie 3 - Réduction de la variance par stratification.

7. *Étude d'une fonction de plusieurs variables.*

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[^3$ par :

$$\forall (x_1,x_2,x_3)\in]0,+\infty[^3,\quad f(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{4x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{9x_3}.$$

a. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[^3$.

b. Calculer les dérivées partielles de f d'ordre 1 et 2.

c. On note $\nabla^2 f(\mathrm{A})=\left(\partial^2_{i,j}f(\mathrm{A})\right)_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ la matrice hessienne de f en $\mathrm{A}=(a_1,a_2,a_3)$.

Justifier que, pour tout $\mathrm{A}\in]0,+\infty[^3$, pour toute matrice colonne H à trois lignes, non nulle, on a :

$${}^t\mathrm{H}\nabla^2 f(\mathrm{A})\mathrm{H}>0.$$

d. La fonction f admet-elle des extremums sur $]0,+\infty[^3$?

e. On cherche désormais les extremums de f sous la contrainte $x_1+x_2+x_3=110$.

Montrer que f admet un unique point critique sous cette contrainte, que l'on déterminera.

f. Montrer qu'il s'agit d'un minimum global sous cette contrainte.

8. *Méthode de stratification.*

Soit a et b deux réels tels que $0<a<b<1$. On considère les trois intervalles $\mathrm{I}_1=[0,a[$, $\mathrm{I}_2=[a,b[$ et $\mathrm{I}_3=[b,1]$.
On considère quatre variables aléatoires indépendantes U_1, U_2, U_3 et T, de lois uniformes respectivement sur I_1, I_2, I_3 et $[0,1]$.
On définit la variable aléatoire $\widetilde{\mathrm{U}}$ par :

$$\widetilde{\mathrm{U}}=\mathrm{U}_1\mathbb{1}_{[\mathrm{T}\in\mathrm{I}_1]}+\mathrm{U}_2\mathbb{1}_{[\mathrm{T}\in\mathrm{I}_2]}+\mathrm{U}_3\mathbb{1}_{[\mathrm{T}\in\mathrm{I}_3]}$$

c'est-à-dire que pour tout élément ω de l'univers Ω :

$$\widetilde{\mathrm{U}}(\omega)=\begin{cases}\mathrm{U}_1(\omega) & \text{si } \mathrm{T}(\omega)\in\mathrm{I}_1\\ \mathrm{U}_2(\omega) & \text{si } \mathrm{T}(\omega)\in\mathrm{I}_2\\ \mathrm{U}_3(\omega) & \text{si } \mathrm{T}(\omega)\in\mathrm{I}_3\end{cases}.$$

a. Montrer que pour tout réel x,

$$\mathbb{P}\left(g(\widetilde{\mathrm{U}})\leqslant x\right)=a\mathbb{P}\left(g(\mathrm{U}_1)\leqslant x\right)+(b-a)\mathbb{P}\left(g(\mathrm{U}_2)\leqslant x\right)+(1-b)\mathbb{P}\left(g(\mathrm{U}_3)\leqslant x\right).$$

b. En admettant que $g(\mathrm{U}_2)$, $g(\mathrm{U}_2)$, $g(\mathrm{U}_3)$ sont des variables aléatoires à densité, montrer que $g(\widetilde{\mathrm{U}})$ est elle-même une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité $f_{g(\widetilde{\mathrm{U}})}$ en fonction de densités de $g(\mathrm{U}_1)$, $g(\mathrm{U}_2)$, $g(\mathrm{U}_3)$, que l'on pourra noter $f_{g(\mathrm{U}_1)}$, $f_{g(\mathrm{U}_2)}$, $f_{g(\mathrm{U}_3)}$.

Vérifier, en prenant la fonction identité pour g, que $\widetilde{\mathrm{U}}$ suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

c. Déduire de ce qui précède que :

$$\mathbb{E}\left(g(\tilde{\mathrm{U}})\right)=a\mathbb{E}\left(g(\mathrm{U}_1)\right)+(b-a)\mathbb{E}\left(g(\mathrm{U}_2)\right)+(1-b)\mathbb{E}\left(g(\mathrm{U}_3)\right).$$

d. On tire de façon indépendante, uniforme sur chacun des intervalles, n_1 points dans I_1, n_2 points dans I_2, n_3 points dans I_3.

On considère donc la famille $(\mathrm{U}_{1,1},\ldots,\mathrm{U}_{1,n_1},\mathrm{U}_{2,1},\ldots,\mathrm{U}_{2,n_2},\mathrm{U}_{3,1},\ldots,\mathrm{U}_{3,n_3})$ de variables aléatoires indépendantes telles que :

- $\mathrm{U}_{1,1},\ldots,\mathrm{U}_{1,n_1}$ ont même loi que U_1,
- $\mathrm{U}_{2,1},\ldots,\mathrm{U}_{2,n_2}$ ont même loi que U_2,
- $\mathrm{U}_{3,1},\ldots,\mathrm{U}_{3,n_3}$ ont même loi que U_3,

et on note Z la variable aléatoire définie par :

$$\mathrm{Z}=a\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}g(\mathrm{U}_{1,i})+(b-a)\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}g(\mathrm{U}_{2,j})+(1-b)\frac{1}{n_3}\sum_{k=1}^{n_3}g(\mathrm{U}_{3,k}).$$

Montrer que :

$$\mathbb{V}(\mathrm{Z})=a^2\frac{1}{n_1}\mathbb{V}\left(g(\mathrm{U}_1)\right)+(b-a)^2\frac{1}{n_2}\mathbb{V}\left(g(\mathrm{U}_2)\right)+(1-b)^2\frac{1}{n_3}\mathbb{V}\left(g(\mathrm{U}_3)\right).$$

e. *Application numérique*
On suppose que, pour un certain choix de la fonction g et des réels a et b, on a

$$a^2\mathbb{V}\Big(g(\mathrm{U}_1)\Big) = \frac{1}{4}, \quad (b-a)^2\mathbb{V}\Big(g(\mathrm{U}_2)\Big) = 1, \quad (1-b)^2\mathbb{V}\Big(g(\mathrm{U}_3)\Big) = \frac{1}{9}.$$

On suppose que l'on tire 110 points, de façon indépendante, uniforme sur chacun des intervalles (n_1 points dans I_1, n_2 points dans I_2, n_3 points dans I_3). Quelles valeurs faut-il donner à n_1, n_2, n_3 pour qu'une valeur prise par Z fournisse une estimation de J avec le plus petit risque d'erreur possible suivant cette méthode ?

Éléments de correction —

1. *a.* Une densité de U est $\boxed{f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.}$

b. La fonction g est continue sur $[0,1]$ et la fonction f est nulle hors de $[0,1]$ et vaut 1 sur $[0,1]$ donc $\int_0^1 g(t)f(t)\mathrm{d}t$ converge absolument.
Donc $\boxed{g(\mathrm{U}) \text{ admet une espérance}}$ et l'espérance est $\boxed{\text{égale à J.}}$

2. *a.* Les $(g(\mathrm{U}_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont indépendantes, ont même espérance et variance donc, d'après la loi faible des grands nombres, leur moyenne empirique converge en probabilité vers leur espérance J or la moyenne empirique est :

$$\frac{\mathrm{S}_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\mathrm{U}_i)$$

donc $\boxed{\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge en probabilité vers J.}}$

b. Les $(g(\mathrm{U}_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont indépendantes, ont même loi avec une variance non nulle donc, d'après le théorème limite central, leur moyenne empirique centrée réduite converge en loi vers une variable de loi normale centrée réduite.
On a $\mathbb{E}\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) = \mathrm{J}$ et, par indépendance des $g(\mathrm{U}_i)$, $\mathbb{V}\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(g(\mathrm{U}_i)) = \frac{\sigma^2}{n}$ donc :

$$\boxed{\frac{\frac{\mathrm{S}_n}{n} - \mathrm{J}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathrm{N} \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1).}$$

c. Notons S_n^* la centrée réduite, on a pour $t > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(-t \leqslant \mathrm{S}_n^* \leqslant t) \geqslant 0,95 &\iff \Phi(t) - \Phi(-t) \geqslant 0,95 \\ &\iff 2\Phi(t) - 1 \geqslant 0,95 \\ &\iff \Phi(t) \geqslant 0,975 \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} (-t \leqslant \mathrm{S}_n^* \leqslant t) &= \left(-t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{\mathrm{S}_n}{n} - \mathrm{J} \leqslant t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \left(\frac{\mathrm{S}_n}{n} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \mathrm{J} \leqslant \frac{\mathrm{S}_n}{n} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

donc, avec $\boxed{t = 1,96}$, $\boxed{\left[\frac{\mathrm{S}_n}{n} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ ; \ \frac{\mathrm{S}_n}{n} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \text{ est un intervalle de confiance pour J, au niveau de confiance 95\%.}}$

3. ***a.*** La fonction $u \mapsto \sin(u)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et bijective strictement croissante de $[0,\pi/2]$ vers $[0,1]$ donc on peut effectuer le changement de variable donné par $t = \sin(u)$, donc $\mathrm{d}t = \cos(u)\mathrm{d}u$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 4\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/2} 4\sqrt{1-\sin(u)^2}\cos(u)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\pi/2} 4|\cos(u)|\cos(u)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\pi/2} 4\cos^2(u)\mathrm{d}u \quad \text{car } \cos \geqslant 0 \text{ sur } [0,\pi/2] \\
&= \int_0^{\pi/2} (2\cos(2u)+2)\mathrm{d}u \quad \text{car } \cos(2u) = 2\cos^2(u)-1 \\
&= \Big[\sin(2u)+2u\Big]_0^{\pi/2}
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\int_0^1 4\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = \pi.}$

b.

```
def G(t):
    return 4 * np.sqrt(1 - t**2)
```

c. En utilisant la question **2.a**, on peut se contenter d'exploiter la moyenne empirique :

```
def approx_pi(n):
    J = 0
    for _ in range(n):
        J += G(rd.random())
    return J/n
```

Cela donne par exemple :

```
>>> approx_pi(10000)
3.1399848444433767
>>> approx_pi(1000000)
3.142998520952169
```

Pour exploiter **2.c**, il faudrait calculer σ^2.

4. Par transfert affine de densité, la loi de $1-\mathrm{U}$ correspond à la densité :

$$x \mapsto \frac{1}{|-1|} f_{\mathrm{U}}\left(\frac{x-1}{-1}\right)$$

or $0 \leqslant -x+1 \leqslant 1$ si et seulement si $0 \leqslant x \leqslant 1$ donc il s'agit de la même densité que celle de U.

Donc $\boxed{1-\mathrm{U} \text{ suit également la loi } \mathscr{U}([0,1]).}$

On en déduit que $g(1-\mathrm{U})$ admet une espérance égale à celle de $g(\mathrm{U})$ *i.e.* π.

Il s'ensuit que $\boxed{\mathrm{Y} \text{ a une espérance et } \mathrm{E}(\mathrm{Y}) = \pi}$

5. ***a.*** Supposons que $u \leqslant w$ alors, puisque g est croissante sur $[0,1]$:

$$g(u) \leqslant g(w) \quad \text{et} \quad g(1-u) \geqslant g(1-w)$$

donc :

$$\underbrace{(g(u)-g(w))}_{\leqslant 0}\underbrace{(g(1-u)-g(1-w))}_{\geqslant 0} \leqslant 0.$$

Si $u \geqslant w$ alors, puisque g est croissante sur $[0,1]$:

$$g(u) \geqslant g(w) \quad \text{et} \quad g(1-u) \leqslant g(1-w)$$

donc :

$$\underbrace{(g(u)-g(w))}_{\geqslant 0}\underbrace{(g(1-u)-g(1-w))}_{\leqslant 0} \leqslant 0.$$

Dans les deux cas :

$$\boxed{\forall (u,w) \in [0,1]^2,\ (g(u)-g(w))(g(1-u)-g(1-w)) \leq 0.}$$

b. Puisque $\mathrm{U} \in [0,1]$ et $\mathrm{W} \in [0,1]$ presque sûrement, on peut utiliser le résultat de la question précédente :

$$\mathbb{P}\left((g(\mathrm{U}) - g(\mathrm{W}))\left(g(1-\mathrm{U}) - g(1-\mathrm{W})\right) \leq 0\right) = 1.$$

Par positivité de l'espérance, on en déduit :

$$\boxed{\mathbb{E}\left((g(\mathrm{U}) - g(\mathrm{W}))(g(1-\mathrm{U}) - g(1-\mathrm{W}))\right) \leqslant 0.}$$

c. Par linéarité de l'espérance (il est admis d'après l'énoncé que ces espérances existent) :

$$\mathbb{E}\left((g(\mathrm{U}) - g(\mathrm{W}))(g(1-\mathrm{U}) - g(1-\mathrm{W}))\right) = \mathbb{E}\left(g(\mathrm{U})g(1-\mathrm{U})\right) + \mathbb{E}\left(g(\mathrm{W})g(1-\mathrm{W})\right) - \mathbb{E}\left(g(\mathrm{U})g(1-\mathrm{W})\right) - \mathbb{E}\left(g(\mathrm{W})g(1-\mathrm{U})\right).$$

Puisque U et W sont indépendantes, il en est de même de $g(\mathrm{U})$ et $g(1-\mathrm{W})$ ainsi que de $g(\mathrm{W})$ et $g(1-\mathrm{U})$, d'où en exploitant la question précédente :

$$\mathbb{E}\left(g(\mathrm{U})g(1-\mathrm{U})\right) + \mathbb{E}\left(g(\mathrm{W})g(1-\mathrm{W})\right) - \mathbb{E}\left(g(\mathrm{U})\right)\mathbb{E}\left(g(1-\mathrm{W})\right) - \mathbb{E}\left(g(\mathrm{W})\right)\mathbb{E}\left(g(1-\mathrm{U})\right) \leqslant 0.$$

D'après la question **4**, U, W, $1-\mathrm{U}$ et $1-\mathrm{W}$ ont même loi donc :

$$2\mathbb{E}\left(g(\mathrm{U})g(1-\mathrm{U})\right) - 2\mathbb{E}\left(g(\mathrm{U})\right)\underbrace{\mathbb{E}\left(g(1-\mathrm{U})\right)}_{=\mathbb{E}(g(\mathrm{U}))} \leqslant 0$$

d'où :

$$\boxed{\mathbb{E}\left(g(\mathrm{U})g(1-\mathrm{U})\right) \leqslant \mathbb{E}\left(g(\mathrm{U})\right)^2.}$$

d. Les v.a.r. $g(\mathrm{U})$ et $g(1-\mathrm{U})$ admettent un moment d'ordre 2 donc :

$$\mathbb{V}(\mathrm{Y}) = \frac{1}{4}\left(\mathbb{V}\left(g(\mathrm{U})\right) + \mathbb{V}\left(g(1-\mathrm{U})\right) + 2\operatorname{cov}\left(g(\mathrm{U}), g(1-\mathrm{U})\right)\right)$$

et (en utilisant la question précédente) :

$$\operatorname{cov}\left(g(\mathrm{U}), g(1-\mathrm{U})\right) = \mathbb{E}\left(g(\mathrm{U})g(1-\mathrm{U})\right) - \mathbb{E}\left(g(\mathrm{U})\right)\mathbb{E}\left(g(1-\mathrm{U})\right) = \mathbb{E}\left(g(\mathrm{U})g(1-\mathrm{U})\right) - \mathbb{E}\left(g(\mathrm{U})\right)^2 \leq 0.$$

On a donc :

$$\mathbb{V}(\mathrm{Y}) \leqslant \frac{1}{4}\left(\mathbb{V}\left(g(\mathrm{U})\right) + \mathbb{V}\left(g(1-\mathrm{U})\right)\right)$$

or $g(\mathrm{U})$ et $g(1-\mathrm{U})$ ont même loi donc même variance, d'où :

$$\boxed{\mathbb{V}(\mathrm{Y}) \leqslant \frac{1}{2}\mathbb{V}\left(g(\mathrm{U})\right).}$$

6. **a.** Soit $g : t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ qui continue et décroissante sur $[0,1]$; on peut utiliser **5.**
On a $\mathrm{Y} = \frac{1}{2}\left[g(\mathrm{U}) + g(1-\mathrm{U})\right]$ donc $\mathbb{E}(\mathrm{Y}) = \pi$ et : $\sigma'^2 = \mathbb{V}(\mathrm{Y}) \leq \dfrac{1}{2}\mathbb{V}\left(g(\mathrm{U})\right) = \dfrac{1}{2}\sigma^2$.
Soit $\gamma : t \mapsto \dfrac{1}{2}\left(g(t) + g(1-t)\right)$ alors, d'après la première partie, $\left[\dfrac{\mathrm{S}_n}{n} - t\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \dfrac{\mathrm{S}_n}{n} + t\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance de $\mathbb{E}\left(\gamma(\mathrm{U})\right) = \mathrm{J} = \pi$ avec $\sigma^2 = \mathbb{V}\left(\gamma(\mathrm{U})\right)$.
Un n-échantillon (Y_i) de même loi que Y redonne le même intervalle de confiance pour π au niveau de confiance 95% que précédemment en remplaçant σ par $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sigma$: avec $\mathrm{T}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\gamma(\mathrm{U})$ et $\sigma' = \sqrt{\mathbb{V}\left(\gamma(\mathrm{U})\right)}$, $\left[\dfrac{\mathrm{T}_n}{n} - t\dfrac{\sigma'}{\sqrt{n}}\ ;\ \dfrac{\mathrm{T}_n}{n} + t\dfrac{\sigma'}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance au niveau de confiance 95%.

b. On avait $\ell_n = 2t\dfrac{\sigma}{\sqrt{2n}}$ et : $2t\dfrac{\sigma'}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}2t\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sigma$ car $\mathbb{V}\left(\gamma(\mathrm{U})\right) \leqslant \frac{1}{2}\mathbb{V}\left(g(\mathrm{U})\right)$.
Donc avec $\boxed{\mathrm{N} = \lfloor n/2 \rfloor}$, on obtient un intervalle de confiance de longueur plus petite.

7. **a.** Les fonctions $x \mapsto x_i$ sont polynomiales donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $]0,+\infty[^3$, à valeurs dans $]0,+\infty[$.
La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est $\mathscr{C}^2$ sur $],+\infty[$ donc par composition $x \mapsto \dfrac{1}{x_i}$ est $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[^3$.
Donc (par somme) $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur }]0,+\infty[^3.}$

b. Pour l'ordre 1 : $\partial_1 f(x) = \dfrac{-1}{4x_1^2}$, $\partial_2 f(x) = \dfrac{-1}{x_2^2}$, $\partial_3 f(x) = \dfrac{-1}{9x_3^2}$.
Pour l'ordre 2 : $\partial^2_{1,1} f(x) = \dfrac{1}{2x_1^3}$, $\partial^2_{2,2} f(x) = \dfrac{2}{x_2^3}$, $\partial^2_{3,3} f(x) = \dfrac{2}{9x_3^3}$.
Les autres dérivées d'ordre 2 sont nulles.

c. On a $\nabla^2 f(\mathrm{A}) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2a_1^3} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{a_2^3} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2}{9a_3^3} \end{pmatrix}$ donc pour $\mathrm{H} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq 0$:

$$^t\mathrm{H}\nabla^2 f(\mathrm{A})\mathrm{H} = \frac{1}{2a_1^3}x_1^2 + \frac{2}{a_2^3}x_2^2 + \frac{2}{9a_3^3}x_3^2 > 0.$$

Donc $\boxed{^t\mathrm{H}\nabla^2 f(\mathrm{A})\mathrm{H} > 0 \text{ pour tout } \mathrm{H} \neq 0.}$

d. D'après les calculs qui précèdent, on a $\nabla f(\mathrm{A})$ non nul pour tout A dans $]0,+\infty[^3$ donc il n'y a pas de point critique.

Donc $\boxed{f \text{ n'a pas d'extremum sur l'ouvert }]0,+\infty[^3.}$

e. Notons $\mathscr{H} = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$, alors : $\mathscr{H}^\perp = \mathrm{Vect}((1,1,1))$.

Un triplet $\mathrm{A} = (x_1,x_2,x_3)$ est un point critique de f sous la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 = 110$ si et seulement si :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 110 \ \text{ et } \nabla f(\mathrm{A}) \in \mathscr{H}^\perp$$

ce qui conduit aux relations :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 110 \ \text{ et } \left(\frac{-1}{4x_1^2}, \frac{-1}{x_2^2}, \frac{-1}{9x_3^2}\right) \in \mathrm{Vect}((1,1,1))$$

c'est-à-dire :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 110 \ \text{ et } \frac{-1}{4x_1^2} = \frac{-1}{x_2^2} = \frac{-1}{9x_3^2}$$

ce qui revient à (puisque les x_i sont positifs) :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 110 \ \text{ et } 2x_1 = x_2 = 3x_3$$

soit :

$$\frac{3}{2}x_3 + 3x_3 + x_3 = 110 \ \text{ et } 2x_1 = x_2 = 3x_3$$

et finalement :

$$x_3 = \frac{2}{11}110 = 20 \ \text{ et } 2x_1 = x_2 = 3x_3.$$

Donc $\boxed{\mathrm{A} = (30,60,20) \text{ est le seul point critique sous la contrainte } x_1 + x_2 + x_3 = 110.}$

f. Soit $\mathbf{x}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ vérifiant la contrainte, on peut l'écrire $\mathbf{x} = \mathrm{A} + \mathbf{h}$ avec $\mathbf{h} = (h_1,h_2,h_3) \in \mathscr{H}$.

Pour tout $t \in [0,1]$, on pose $\varphi(t) = f(\mathrm{A} + t\mathbf{h})$, il s'agit d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ et la formule de Taylor avec reste intégral donne :

$$\varphi(1) = \varphi(0) + (1-0)\varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire :

$$f(\mathrm{A} + t\mathbf{h}) = f(\mathrm{A}) + \langle \nabla f(\mathrm{A}), \mathbf{h} \rangle + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\mathrm{d}t.$$

On a $\nabla f(\mathrm{A}) \in \mathscr{H}^\perp$ et $\mathbf{h} \in \mathscr{H}$ donc $\langle \nabla f(\mathrm{A}), \mathbf{h} \rangle = 0$.

D'autre part :

$$\varphi''(t) = {}^t\mathbf{h}\nabla^2 f(\mathrm{A} + t\mathbf{h})\mathbf{h} \geqslant 0$$

donc, par positivité de l'intégrale sur $[0,1]$, on a $\displaystyle\int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\mathrm{d}t$.

Finalement, on a $f(\mathbf{x}) = f(\mathrm{A} + t\mathbf{h}) \geqslant f(\mathrm{A})$.

Donc $\boxed{\text{A est un minimum global sous la contrainte considérée.}}$

8. *a.* Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque $(\mathrm{T} \in \mathrm{I}_1), (\mathrm{T} \in \mathrm{I}_2), (\mathrm{T} \in \mathrm{I}_3)$ et $(\mathrm{T} \notin [0,1])$ forment un système complet d'événements, il résulte de la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}\left(g(\tilde{\mathrm{U}}) \leq x\right) = \mathbb{P}(\mathrm{T} \in \mathrm{I}_1)\mathbb{P}_{(\mathrm{T}\in\mathrm{I}_1)}\left(g(\tilde{\mathrm{U}}) \leq x\right) + \mathbb{P}(\mathrm{T} \in \mathrm{I}_2)\mathbb{P}_{(\mathrm{T}\in\mathrm{I}_2)}\left(g(\tilde{\mathrm{U}}) \leq x\right) + \mathbb{P}(\mathrm{T} \in \mathrm{I}_3)\mathbb{P}_{(\mathrm{T}\in\mathrm{I}_3)}\left(g(\tilde{\mathrm{U}}) \leq x\right)$$
$$+ \mathbb{P}(\mathrm{T} \notin [0,1])\mathbb{P}_{(\mathrm{T}\notin[0,1])}\left(g(\tilde{\mathrm{U}}) \leq x\right)$$

or $\mathrm{T} \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$ donc :

$$\mathbb{P}(\mathrm{T} \in \mathrm{I}_1) = a, \ \mathbb{P}(\mathrm{T} \in \mathrm{I}_2) = b - a, \ \mathbb{P}(\mathrm{T} \in \mathrm{I}_3) = 1 - b \text{ et } \mathbb{P}(\mathrm{T} \notin [0,1]) = 0$$

puis :

$$\mathbb{P}\left(g(\tilde{\mathrm{U}}) \leq x\right) = a\mathbb{P}_{(\mathrm{T}\in\mathrm{I}_1)}\left(g(\tilde{\mathrm{U}}) \leq x\right) + (b-a)\mathbb{P}_{(\mathrm{T}\in\mathrm{I}_2)}\left(g(\tilde{\mathrm{U}}) \leq x\right) + (1-b)\mathbb{P}_{(\mathrm{T}\in\mathrm{I}_3)}\left(g(\tilde{\mathrm{U}}) \leq x\right).$$

Enfin, on a pour $j \in \{1,2,3\}$ et par indépendance de T et U_j (donc de T et $g(\mathrm{U}_j)$) :

$$\mathbb{P}_{\left(\mathrm{T}\in\mathrm{I}_j\right)}\left(g(\tilde{\mathrm{U}}) \leqslant x\right) = \mathbb{P}_{\left(\mathrm{T}\in\mathrm{I}_j\right)}\left(g(\mathrm{U}_j) \leqslant x\right) = \mathbb{P}\left(g(\mathrm{U}_j) \leqslant x\right)$$

d'où :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(g(\tilde{\mathrm{U}}) \leq x\right) = a\mathbb{P}(g(\mathrm{U}_1) \leqslant x) + (b-a)\mathbb{P}(g(\mathrm{U}_2) \leqslant x) + (1-b)\mathbb{P}(g(\mathrm{U}_3) \leqslant x).}$$

b. On a admis que les $g\left(\mathrm{U}_j\right)$ sont à densité donc les fonctions de répartition sont continues sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini de points. Donc il en est de même de la fonction de répartition de $g\left(\tilde{\mathrm{U}}\right)$.

Donc $g\left(\tilde{\mathrm{U}}\right)$ est à densité et une densité est, là où ces fonction sont dérivables :

$$x \mapsto a\mathrm{F}'_{g(\mathrm{U}_1)}(x) + (b-a)\,\mathrm{F}'_{g(\mathrm{U}_2)}(x) + (1-b)\,\mathrm{F}'_{g(\mathrm{U}_3)}(x)$$

et $\boxed{f_{g(\tilde{\mathrm{U}})} = af_{g(\mathrm{U}_1)} + (b-a)\,f_{g(\mathrm{U}_2)} + (1-b)\,f_{g(\mathrm{U}_3)}}$

Donc, avec $g = \mathrm{id}$ continue sur $[0,1]$: $f_{\tilde{\mathrm{U}}} = af_{\mathrm{U}_1} + (b-a)\,f_{\mathrm{U}_2} + (1-b)\,f_{\mathrm{U}_3}$

D'où pour $t < 0$: $f_{\tilde{\mathrm{U}}}(t) = 0$.

Si $t \in [0,a]$:

$$f_{\tilde{\mathrm{U}}}(t) = af_{\mathrm{U}_1}(t) + (b-a)\,f_{\mathrm{U}_2}(t) + (1-b)\,f_{\mathrm{U}_3}(t) = a \times \frac{1}{a} + 0 + 0 = 1$$

car les densités des lois uniformes sont nulle en dehors de leur intervalle caractéristique.

De même sur les intervalles $]a,b]$ et $]b,1]$.

Donc $\boxed{\widetilde{\mathrm{U}} \hookrightarrow \mathscr{U}_{[0,1]}}$

c. On a $f_{g(\tilde{\mathrm{U}})} = af_{g(\mathrm{U}_1)} + (b-a)\,f_{g(\mathrm{U}_2)+(1-b)}f_{g(\mathrm{U}_3)}$.

Puisqu'il s'agit de fonctions continues sur un segment, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)\,f_{\mathrm{U}_i}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument donc, par théorème de transfert, $g(\mathrm{U}_i)$ a une espérance :

$$\mathbb{E}(g(\mathrm{U}_i)) = \int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)\,f_{\mathrm{U}_i}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Quitte à majorer la valeur absolue par inégalité triangulaire, on en déduit que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)\left(af_{g(\mathrm{U}_1)} + (b-a)\,f_{g(\mathrm{U}_2)+(1-b)}f_{g(\mathrm{U}_3)}\right)\mathrm{d}t$$

est absolument convergente donc (théorème de transfert) $g\left(\tilde{\mathrm{U}}\right)$ a une espérance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(g\left(\tilde{\mathrm{U}}\right)\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\left[af_{g(\mathrm{U}_1)} + (b-a)\,f_{g(\mathrm{U}_2)} + (1-b)\,f_{g(\mathrm{U}_3)}\right]\mathrm{d}t \\
&= a\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)\,f_{\mathrm{U}_1}(t)\,\mathrm{d}t + (b-a)\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)\,f_{\mathrm{U}_2}(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)\,f_{\mathrm{U}_3}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= a\mathbb{E}(g(\mathrm{U}_1)) + (b-a)\mathbb{E}(g(\mathrm{U}_2)) + (1-b)\mathbb{E}(g(\mathrm{U}_3)).
\end{aligned}$$

d. Les variables étant indépendantes et ayant une variance, Z a une variance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\mathrm{Z}) &= \left(a\frac{1}{n_1}\right)^2 \sum_{i=1}^{n_1} \mathbb{V}\left(g(\mathrm{U}_{1,i})\right) + \left((b-a)\frac{1}{n_2}\right)^2 \sum_{j=1}^{n_2} \mathbb{V}\left(g(\mathrm{U}_{2,j})\right) + \left(1-b)\frac{1}{n_3}\right)^2 \sum_{k=1}^{n_3} \mathbb{V}\left(g(\mathrm{U}_{3,k})\right) \\
&= \left(a\frac{1}{n_1}\right)^2 n_1\mathbb{V}(g(\mathrm{U}_1)) + \left((b-a)\frac{1}{n_2}\right)^2 n_2\mathbb{V}(g(\mathrm{U}_2)) + \left(1-b)\frac{1}{n_3}\right)^2 n_3\mathbb{V}(g(\mathrm{U}_3)) \\
&= a^2\frac{1}{n_1}\mathbb{V}(g(\mathrm{U}_1)) + (b-a)^2\frac{1}{n_2}\mathbb{V}(g(\mathrm{U}_2)) + (1-b)^2\frac{1}{n_3}\mathbb{V}(g(\mathrm{U}_3))
\end{aligned}$$

e. Par linéarité on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathrm{Z}) &= a\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\mathbb{E}\left(g(\mathrm{U}_{1,i})\right) + (b-a)\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}\mathbb{E}\left(g(\mathrm{U}_{2,j})\right) + (1-b)\frac{1}{n_3}\sum_{k=1}^{n_3}\mathbb{E}\left(g(\mathrm{U}_{3,k})\right) \\
&= a\frac{1}{n_1}n_1\mathbb{E}(g(\mathrm{U}_1)) + (b-a)\frac{1}{n_2}n_2\mathbb{E}(g(\mathrm{U}_2)) + (1-b)\frac{1}{n_3}n_3\mathbb{E}(g(\mathrm{U}_3)) \\
&= a\mathbb{E}(g(\mathrm{U}_1)) + (b-a)\mathbb{E}(g(\mathrm{U}_2)) + (1-b)\mathbb{E}(g(\mathrm{U}_3)) \\
&= \mathbb{E}\left(g\left(\tilde{\mathrm{U}}\right)\right) = \mathbb{E}(g(\mathrm{U})) = \mathrm{J}
\end{aligned}$$

car $\tilde{U}$ et U ont la même loi.
Donc Z est un estimateur de J sans biais.
D'autre part :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(Z_1) &= a^2 \frac{1}{n_1} V(g(U_1)) + (b-a)^2 \frac{1}{n_2} V(g(U_2)) + (1-b)^2 \frac{1}{n_3} V(g(U_3)) \\ &= \frac{1}{4n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{9n_3}\end{aligned}$$

avec la contrainte de 110 points, $n_1 + n_2 + n_3 = 110$.
Cette quantité est minimale, avec $\boxed{n_1 = 30,\ n_2 = 60 \text{ et } n_3 = 20}$