Consignes

- L'énoncé comporte trois exercices et un problème.
  Ces derniers peuvent être traités dans un ordre quelconque mais doivent être chacun commencés sur une nouvelle page et les questions doivent être séparées d'une ligne horizontale sur toute la largeur de la page.
- Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.
- La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- Les résultats doivent être mis en valeur et les pages doivent être numérotées.
- Pour les question d'informatique, on supposera exécutées les instructions suivantes :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\mathrm{d}x$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose alors $v_n = \displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\mathrm{d}x$ et $w_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\mathrm{d}x$.

   a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant w_n \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

   b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}\ln(n+1)$.

   c. Donner la limite de la suite (u_n).

3. On se propose de déterminer un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

   a. Montrer que l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{1} \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x$ est une intégrale convergente.

   b. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^{1} \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{I}$.

   c. En déduire un encadrement de v_n valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   d. Donner enfin, en utilisant cet encadrement, un équivalent simple de u_n.

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une matrice M telle que $\mathrm{rg}(\mathrm{M}) = 1$.
On note C la première colonne de M et on suppose que C est non nulle.

1. Donner la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ et en déduire une valeur propre de f.

2. ***a.*** Montrer qu'il existe une matrice $\mathrm{L} = (1\ \ell_1\ \ldots\ \ell_n)$ appartenant à $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{M} = \mathrm{CL}$.

   b. On rappelle que $\mathrm{tr}(\mathrm{M})$ désigne la trace de la matrice M. Montrer que $\mathrm{tr}(\mathrm{M}) = \mathrm{LC}$.

   c. Établir que l'on a l'égalité :

$$\mathrm{M}^2 = \mathrm{tr}(\mathrm{M})\mathrm{M}$$

3. Montrer que $\mathrm{tr}(\mathrm{M})$ est valeur propre de f.

4. On suppose que $\mathrm{tr}(\mathrm{M}) = 0$. Montrer que M n'est pas diagonalisable.

5. On suppose que $\mathrm{tr}(\mathrm{M}) \neq 0$. À l'aide des questions précédentes, déterminer les valeurs propres de f et montrer que f est diagonalisable.

On désigne par a, b, c trois réels non nuls et on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/b \\ a & 1 & 1/c \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$.

On suppose que A n'est pas inversible.

6. ***a.*** En considérant le système $AX = 0$, où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, établir, en raisonnant par l'absurde, la relation $ac = b$.

b. En déduire le rang de A.

7. ***a.*** Conclure que g est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, A^n appartient à Vect(A).

Exercice 3

On considère un entier naturel n supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant $2n$ boules numérotées de 1 à n, chaque boule apparaissant deux fois. On effectue « au hasard » une succession de tirages simultanés de deux boules de cette urne selon le protocole suivant :

- à chaque tirage de deux boules, si les deux boules tirées portent le même numéro, on ne remet pas les deux boules dans l'urne et on dit qu'une paire est constituée,
- si les deux boules tirées portent des numéros différents, on les remet dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

Pour tout élément i de $[\![1, n]\!]$ et tout entier naturel k non nul, on pose $T_i = k$ si k tirages exactement ont été nécessaires pour constituer i paires.

On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ permettant de modéliser cette expérience et que, pour tout entier i de $[\![1, n]\!]$, T_i est une variable aléatoire définie sur cet espace.

1. ***a.*** Déterminer la loi de T_1 et reconnaitre cette loi.

b. Donner, sans calcul, la valeur de l'espérance de T_1.

2. Écrire une fonction Python qui simule la variable T_1.

3. On pose $X_1 = T_1$ et pour tout i de $[\![2, n]\!]$: $X_i = T_i - T_{i-1}$.

a. Que représente la variable X_i ?

b. Déterminer, pour tout i de $[\![1, n]\!]$ la loi de X_i ainsi que son espérance.

c. En déduire que T_n admet une espérance et que $\mathbb{E}(T_n) = n^2$.

4. On effectue une suite de n tirages de deux boules selon le protocole précédent.
On note S_n la variable aléatoire égale au nombre de paires reconstituées lors de ces n tirages.

a. Calculer $\mathbb{P}(S_n = 0)$.

b. Déterminer la limite en $+\infty$ de $\mathbb{P}(S_n = 0)$.

c. Montrer que : $\mathbb{P}(S_n = n) = \dfrac{n!2^n}{(2n)!}$.

5. Écrire une fonction Python qui simule la variable S_n.

Problème

L'objet du problème est la présentation d'une méthode probabiliste de calcul d'une intégrale (méthode de Monte-Carlo) et de deux façons de l'améliorer. Dans tout le problème, U désigne une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$, g une fonction continue sur $[0, 1]$ et on pose $J = \displaystyle\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$.

L'espérance d'une variable aléatoire X sera notée $\mathbb{E}(X)$ et sa variance $\mathbb{V}(X)$ (si elles existent).

On admet que, pour tout entier naturel non nul n, si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires à densités, mutuellement indépendantes, alors des variables aléatoires de la forme $f_1(X_1)$, $f_2(X_2), \dots, f_n(X_n)$ où les f_i sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, distinctes ou non, sont également mutuellement indépendantes.

Partie 1 - Méthode de Monte-Carlo.

1. *a.* Rappeler une densité de U.

   b. Justifier que la variable aléatoire $g(\mathrm{U})$ admet une espérance égale à J.

2. Soit $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que U.

   On suppose que $\sigma^2 = \mathbb{V}\big(g(\mathrm{U})\big) \neq 0$ et on note pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} g(\mathrm{U}_i)$.

   a. Justifier que la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{\mathrm{S}_n}{n}\right)$ converge en probabilité vers J.

   b. Justifier que la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{\frac{\mathrm{S}_n}{n} - \mathrm{J}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

   c. On considère pour « n suffisamment grand » que $\dfrac{\frac{\mathrm{S}_n}{n} - \mathrm{J}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

   On donne $\Phi(1,96) = 0,975$ où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
   Déterminer un intervalle de confiance pour J, au niveau de confiance 95%, faisant intervenir S_n.

3. *Application :*

   a. À l'aide du changement de variable $t = \sin(u)$, montrer que $\displaystyle\int_0^1 4\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \pi$.

   b. Écrire, en langage Python, une fonction `G`, de paramètre `t`, qui pour une valeur t du paramètre renvoie la valeur $4\sqrt{1-t^2}$.

   c. On rappelle qu'en langage Python, l'instruction `rd.random()` permet de simuler une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1[$. En utilisant le résultat de la question 2 et la fonction `G`, écrire une fonction `approx_pi` (de paramètre `n`) qui calcule une valeur approchée de π.

Partie 2 - Réduction de la variance par variables antithétiques.

4. Reconnaître la loi de $1-\mathrm{U}$.

   On définit la variable aléatoire Y par $\mathrm{Y} = \dfrac{1}{2}\left(g(\mathrm{U}) + g(1-\mathrm{U})\right)$. Déterminer l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(\mathrm{Y})$.

5. On suppose g strictement croissante et on admet l'existence des espérances intervenant dans cette question.

   a. Justifier que, pour tout $(u,w) \in [0,1]^2$,

   $$\big(g(u) - g(w)\big)\big(g(1-u) - g(1-w)\big) \leqslant 0.$$

   b. Soit W une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, indépendante de U.
   Quel est le signe de $\mathbb{E}\left((g(\mathrm{U}) - g(\mathrm{W}))(g(1-\mathrm{U}) - g(1-\mathrm{W}))\right)$?

   c. En déduire que : $\mathbb{E}\left(g(\mathrm{U})g(1-\mathrm{U})\right) \leqslant \left(\mathbb{E}\left(g(\mathrm{U})\right)\right)^2$.
   On admet que l'on obtiendrait le même résultat pour g strictement décroissante.

   d. Montrer alors que, lorsque g est strictement monotone : $\mathbb{V}(\mathrm{Y}) \leqslant \dfrac{1}{2}\mathbb{V}\big(g(\mathrm{U})\big)$.

6. *a.* Donner un nouvel intervalle de confiance pour J au niveau de confiance 95%, fondé sur cette méthode.

   b. Fixons n et notons ℓ_n la longueur de l'intervalle de confiance obtenu dans la partie **I**.
   Notons ℓ'_{N} la longueur trouvée à la question précédente pour N tirages de la variable aléatoire uniforme.
   Quelle condition suffit-il que N vérifie pour avoir $\ell'_{\mathrm{N}} \leqslant \ell_n$?

Partie 3 - Réduction de la variance par stratification.

7. *Étude d'une fonction de plusieurs variables.*
   On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[^3$ par :

   $$\forall (x_1,x_2,x_3) \in]0,+\infty[^3, \quad f(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{4x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{9x_3}.$$

   a. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[^3$.

   b. Calculer les dérivées partielles de f d'ordre 1 et 2.

c. On note $\nabla^2 f(\mathrm{A}) = \left(\partial^2_{i,j} f(\mathrm{A})\right)_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ la matrice hessienne de f en $\mathrm{A} = (a_1, a_2, a_3)$.

Justifier que, pour tout $\mathrm{A} \in]0,+\infty[^3$, pour toute matrice colonne H à trois lignes, non nulle, on a :

$$^t\mathrm{H}\nabla^2 f(\mathrm{A})\mathrm{H} > 0.$$

d. La fonction f admet-elle des extremums sur $]0,+\infty[^3$?

e. On cherche désormais les extremums de f sous la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 = 110$.

Montrer que f admet un unique point critique sous cette contrainte, que l'on déterminera.

f. Montrer qu'il s'agit d'un minimum global cette contrainte.

8. *Méthode de stratification.*

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b < 1$. On considère les trois intervalles $\mathrm{I}_1 = [0,a[$, $\mathrm{I}_2 = [a,b[$ et $\mathrm{I}_3 = [b,1]$.
On considère quatre variables aléatoires indépendantes U_1, U_2, U_3 et T, de lois uniformes respectivement sur I_1, I_2, I_3 et $[0,1]$.
On définit la variable aléatoire $\widetilde{\mathrm{U}}$ par :

$$\widetilde{\mathrm{U}} = \mathrm{U}_1 \mathbb{1}_{[\mathrm{T}\in \mathrm{I}_1]} + \mathrm{U}_2 \mathbb{1}_{[\mathrm{T}\in \mathrm{I}_2]} + \mathrm{U}_3 \mathbb{1}_{[\mathrm{T}\in \mathrm{I}_3]}$$

c'est-à-dire que pour tout élément ω de l'univers Ω :

$$\widetilde{\mathrm{U}}(\omega) = \begin{cases} \mathrm{U}_1(\omega) & \text{si } \mathrm{T}(\omega) \in \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{U}_2(\omega) & \text{si } \mathrm{T}(\omega) \in \mathrm{I}_2 \\ \mathrm{U}_3(\omega) & \text{si } \mathrm{T}(\omega) \in \mathrm{I}_3 \end{cases}.$$

a. Montrer que pour tout réel x,

$$\mathbb{P}\left(g(\widetilde{\mathrm{U}}) \leqslant x\right) = a\mathbb{P}\left(g(\mathrm{U}_1) \leqslant x\right) + (b-a)\mathbb{P}\left(g(\mathrm{U}_2) \leqslant x\right) + (1-b)\mathbb{P}\left(g(\mathrm{U}_3) \leqslant x\right).$$

b. En admettant que $g(\mathrm{U}_2)$, $g(\mathrm{U}_2)$, $g(\mathrm{U}_3)$ sont des variables aléatoires à densité, montrer que $g(\widetilde{\mathrm{U}})$ est elle-même une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité $f_{g(\widetilde{\mathrm{U}})}$ en fonction de densités de $g(\mathrm{U}_1)$, $g(\mathrm{U}_2)$, $g(\mathrm{U}_3)$, que l'on pourra noter $f_{g(\mathrm{U}_1)}$, $f_{g(\mathrm{U}_2)}$, $f_{g(\mathrm{U}_3)}$.

Vérifier, en prenant la fonction identité pour g, que $\widetilde{\mathrm{U}}$ suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

c. Déduire de ce qui précède que :

$$\mathbb{E}\left(g(\tilde{\mathrm{U}})\right) = a\mathbb{E}\left(g(\mathrm{U}_1)\right) + (b-a)\mathbb{E}\left(g(\mathrm{U}_2)\right) + (1-b)\mathbb{E}\left(g(\mathrm{U}_3)\right).$$

d. On tire de façon indépendante, uniforme sur chacun des intervalles, n_1 points dans I_1, n_2 points dans I_2, n_3 points dans I_3.

On considère donc la famille $(\mathrm{U}_{1,1},\ldots,\mathrm{U}_{1,n_1},\mathrm{U}_{2,1},\ldots,\mathrm{U}_{2,n_2},\mathrm{U}_{3,1},\ldots,\mathrm{U}_{3,n_3})$ de variables aléatoires indépendantes telles que :

- $\mathrm{U}_{1,1},\ldots,\mathrm{U}_{1,n_1}$ ont même loi que U_1,
- $\mathrm{U}_{2,1},\ldots,\mathrm{U}_{2,n_2}$ ont même loi que U_2,
- $\mathrm{U}_{3,1},\ldots,\mathrm{U}_{3,n_3}$ ont même loi que U_3,

et on note Z la variable aléatoire définie par :

$$\mathrm{Z} = a\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} g(\mathrm{U}_{1,i}) + (b-a)\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} g(\mathrm{U}_{2,j}) + (1-b)\frac{1}{n_3}\sum_{k=1}^{n_3} g(\mathrm{U}_{3,k}).$$

Montrer que :

$$\mathbb{V}(\mathrm{Z}) = a^2\frac{1}{n_1}\mathbb{V}\left(g(\mathrm{U}_1)\right) + (b-a)^2\frac{1}{n_2}\mathbb{V}\left(g(\mathrm{U}_2)\right) + (1-b)^2\frac{1}{n_3}\mathbb{V}\left(g(\mathrm{U}_3)\right).$$

e. *Application numérique*

On suppose que, pour un certain choix de la fonction g et des réels a et b, on a

$$a^2\mathbb{V}\left(g(\mathrm{U}_1)\right) = \frac{1}{4}, \quad (b-a)^2\mathbb{V}\left(g(\mathrm{U}_2)\right) = 1, \quad (1-b)^2\mathbb{V}\left(g(\mathrm{U}_3)\right) = \frac{1}{9}.$$

On suppose que l'on tire 110 points, de façon indépendante, uniforme sur chacun des intervalles (n_1 points dans I_1, n_2 points dans I_2, n_3 points dans I_3). Quelles valeurs faut-il donner à n_1, n_2, n_3 pour qu'une valeur prise par Z fournisse une estimation de J avec le plus petit risque d'erreur possible suivant cette méthode ?