Consignes

- L'énoncé comporte un questionnaire à rendre (en n'oubliant pas d'indiquer son nom dans la case prévue à cet effet) ainsi que les énoncés de cinq exercices.
  Ces derniers peuvent être traités dans un ordre quelconque mais doivent être chacun commencés sur une nouvelle page et les questions doivent être séparées d'une ligne horizontale sur toute la largeur de la page.
- Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.
- La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- Les résultats doivent être mis en valeur et les pages doivent être numérotées.

NOM :

Questionnaire

1 ► Soit $\mathscr{F} = \{-28; -23; -18; -13; -8; -3; 2; 7\}$.
Donner une définition de l'ensemble $\mathscr{F}$ sans avoir à énumérer ses éléments :

2 ► Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant : $\exists y \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = y$.
Que signifie cette propriété ?

3 ► Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Traduire avec des quantificateurs le fait que f ne soit pas la fonction nulle :

4 ► Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Traduire avec des quantificateurs le fait qu'il y ait au moins une valeur prise au moins deux fois par f :

5 ► Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Traduire avec des quantificateurs le fait que f ne soit pas constante sur l'intervalle $[0, 1]$:

6 ► Soit x un nombre réel. Compléter le lien entre les assertions de gauche et de droite avec «**il faut**» ou «**il suffit**» :

a. Pour que $(x-1)(x+1)=0$, [ ] que $x=-1$.

b. Pour que $(x-1)(x+1)=0$, [ ] que $x \leqslant 2$.

c. Pour que $\sqrt{x^2}=x$, [ ] que x soit strictement supérieur à 1.

d. Pour que l'expression x^2+x-2 soit non nulle, [ ] que $x \geqslant 2$.

e. Pour que l'expression x^2+x-2 soit strictement négative, [ ] que $x \geqslant -2$.

7 ► Soit x un nombre réel. Compléter le lien entre les assertions de gauche et de droite avec «**nécessaire**» ou «**suffisante**» :

a. Une condition [ ] pour que l'expression $\sqrt{x^2-4}$ soit bien définie est que $x \notin [0,1]$.

b. Une condition [ ] pour que l'expression $\ln\big(|x-3|\big)$ soit bien définie est que $x \leqslant 0$.

c. Une condition [ ] pour que $\sqrt{x^2}=x$ est que x soit strictement positif.

8 ► *Lettres grecques*

Compléter le tableau suivant (lettres minuscules) :

nom de la lettre	theta	lambda			phi	delta		gamma
symbole			ψ	ε			α	

Compléter le tableau suivant (lettres majuscules) :

nom de la lettre	Gamma	Delta			
symbole			Λ	Σ	Φ

Exercice 1

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Exercice 2

On considère la suite de nombre réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=4$, $u_1=0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2}=2u_{n+1}+3u_n.$$

Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence double :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n=3\,(-1)^n+3^n.$$

Exercice 3

Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivante :

$$(\mathbf{E}) : \sqrt{x^2-9} = x+2.$$

Exercice 4

On considère trois réels a, b et c vérifiant :

$$0 \leqslant a \leqslant b \qquad \text{et} \qquad 0 < c.$$

1. Soit x un réel. Montrer que le discriminant du trinôme (de variable x) suivant :

$$\mathrm{P}(x) = x^2 - \left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)x + (b-a),$$

est égal à :

$$-\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\left(3\sqrt{b}+5\sqrt{a}\right).$$

2. Déterminer le signe de l'expression $\mathrm{P}(x)$ définie ci-dessus.

3. En déduire l'inégalité suivante :

$$\sqrt{b}-\sqrt{a} \leqslant \frac{1}{c}(b-a)+c.$$

Exercice 5

Dans cet exercice, on considère l'énoncé suivant que l'on note $\mathscr{P}(n)$ où $n \in \mathbb{N}^*$:

> Pour tous nombres réels positifs ou nuls $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on a :
>
> $$x_1 x_2 \cdots x_n \leqslant \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n.$$

1. Vérifier que $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

2. ***a.*** Montrer que pour tous réels positifs a et b, on a : $(a+b)^2 \geqslant 4ab$.

b. En déduire que $\mathscr{P}(2)$ est vraie.

3. ***a.*** Montrer que pour tout réel positif ou nul x, on a : $(2+x)^3 \geqslant 27x$.
Indication : écrire $(2+x)^3 - 27x = (x-1)(x-\alpha)(x-\beta)$ où α et β sont des entiers à déterminer.

b. Montrer que pour tous réels positifs ou nul y et z, on a :

$$(2y+z)^3 \geqslant 27y^2z.$$

c. En exploitant la propriété $\mathscr{P}(2)$, montrer que pour tous réels positifs ou nuls a, b et c, on a :

$$(a+b+c)^3 \geqslant 27abc.$$

d. Montrer que $\mathscr{P}(3)$ est vraie.

4. En utilisant plusieurs fois $\mathscr{P}(2)$, montrer que $\mathscr{P}(4)$ est vraie.

Consignes

- L'énoncé comporte un questionnaire à rendre (en n'oubliant pas d'indiquer son nom dans la case prévue à cet effet) ainsi que les énoncés de cinq exercices.
  Ces derniers peuvent être traités dans un ordre quelconque mais doivent être chacun commencés sur une nouvelle page et les questions doivent être séparées d'une ligne horizontale sur toute la largeur de la page.
- Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.
- La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- Les résultats doivent être mis en valeur et les pages doivent être numérotées.

NOM :

Questionnaire

1 ► Soit $\mathscr{F} = \{-18; -14; -10; -6; -2; 2; 6; 10\}$.
Donner une définition de l'ensemble $\mathscr{F}$ sans avoir à énumérer ses éléments :

2 ► Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant : $\exists y \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = y$.
Que signifie cette propriété ?

3 ► Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Traduire avec des quantificateurs le fait que f ne soit pas la fonction nulle :

4 ► Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Traduire avec des quantificateurs le fait qu'il y ait au moins une valeur prise au moins deux fois par f :

5 ► Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Traduire avec des quantificateurs le fait que f ne soit pas constante sur l'intervalle $[0, 1]$:

6 ► Soit x un nombre réel. Compléter le lien entre les assertions de gauche et de droite avec «**il faut**» ou «**il suffit**» :

a. Pour que $(x-1)(x+1)=0$, [ ] que $x=1$.

b. Pour que $(x-1)(x+1)=0$, [ ] que $x \geqslant -3$.

c. Pour que $\sqrt{x^2}=x$, [ ] que x soit strictement supérieur à 1.

d. Pour que l'expression x^2+x-2 soit non nulle, [ ] que $x \leqslant -2$.

e. Pour que l'expression x^2+x-2 soit strictement négative, [ ] que $x \leqslant 2$.

7 ► Soit x un nombre réel. Compléter le lien entre les assertions de gauche et de droite avec «**nécessaire**» ou «**suffisante**» :

a. Une condition [ ] pour que l'expression $\sqrt{x^2-4}$ soit bien définie est que $x \notin [0,1]$.

b. Une condition [ ] pour que l'expression $\ln\big(|x-3|\big)$ soit bien définie est que $x \leqslant 0$.

c. Une condition [ ] pour que $\sqrt{x^2}=x$ est que x soit strictement positif.

8 ► *Lettres grecques*

Compléter le tableau suivant (lettres minuscules) :

nom de la lettre		theta			phi	delta	gamma	alpha
symbole	λ		ψ	ε				

Compléter le tableau suivant (lettres majuscules) :

nom de la lettre	Gamma	Lambda			
symbole			Δ	Σ	Ψ

Exercice 1

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Exercice 2

On considère la suite de nombre réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=4$, $u_1=0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2}=2u_{n+1}+3u_n.$$

Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence double :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n=3\,(-1)^n+3^n.$$

Exercice 3

Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivante :

$$(\mathbf{E}) : \sqrt{x^2-9} = x+2.$$

Exercice 4

On considère trois réels a, b et c vérifiant :

$$0 \leqslant a \leqslant b \qquad \text{et} \qquad 0 < c.$$

1. Soit x un réel. Montrer que le discriminant du trinôme (de variable x) suivant :

$$\mathrm{P}(x) = x^2 - \left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)x + (b-a),$$

est égal à :

$$-\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\left(3\sqrt{b}+5\sqrt{a}\right).$$

2. Déterminer le signe de l'expression $\mathrm{P}(x)$ définie ci-dessus.

3. En déduire l'inégalité suivante :

$$\sqrt{b}-\sqrt{a} \leqslant \frac{1}{c}(b-a)+c.$$

Exercice 5

Dans cet exercice, on considère l'énoncé suivant que l'on note $\mathscr{P}(n)$ où $n \in \mathbb{N}^*$:

> Pour tous nombres réels positifs ou nuls $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on a :
>
> $$x_1 x_2 \cdots x_n \leqslant \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n.$$

1. Vérifier que $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

2. ***a.*** Montrer que pour tous réels positifs a et b, on a : $(a+b)^2 \geqslant 4ab$.

b. En déduire que $\mathscr{P}(2)$ est vraie.

3. ***a.*** Montrer que pour tout réel positif ou nul x, on a : $(2+x)^3 \geqslant 27x$.
Indication : écrire $(2+x)^3 - 27x = (x-1)(x-\alpha)(x-\beta)$ où α et β sont des entiers à déterminer.

b. Montrer que pour tous réels positifs ou nul y et z, on a :

$$(2y+z)^3 \geqslant 27y^2z.$$

c. En exploitant la propriété $\mathscr{P}(2)$, montrer que pour tous réels positifs ou nuls a, b et c, on a :

$$(a+b+c)^3 \geqslant 27abc.$$

d. Montrer que $\mathscr{P}(3)$ est vraie.

4. En utilisant plusieurs fois $\mathscr{P}(2)$, montrer que $\mathscr{P}(4)$ est vraie.

Consignes

- L'énoncé comporte un questionnaire à rendre (en n'oubliant pas d'indiquer son nom dans la case prévue à cet effet) ainsi que les énoncés de cinq exercices.
  Ces derniers peuvent être traités dans un ordre quelconque mais doivent être chacun commencés sur une nouvelle page et les questions doivent être séparées d'une ligne horizontale sur toute la largeur de la page.
- Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.
- La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- Les résultats doivent être mis en valeur et les pages doivent être numérotées.

NOM :

Questionnaire

1 ► Soit $\mathscr{F} = \{-15; -11; -7; -3; 1; 5; 9; 13; 17\}$.
Donner une définition de l'ensemble $\mathscr{F}$ sans avoir à énumérer ses éléments :

2 ► Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant : $\exists y \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = y$.
Que signifie cette propriété ?

3 ► Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Traduire avec des quantificateurs le fait que f ne soit pas la fonction nulle :

4 ► Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Traduire avec des quantificateurs le fait qu'il y ait au moins une valeur prise au moins deux fois par f :

5 ► Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Traduire avec des quantificateurs le fait que f ne soit pas constante sur l'intervalle $[0, 1]$:

6 ► Soit x un nombre réel. Compléter le lien entre les assertions de gauche et de droite avec «**il faut**» ou «**il suffit**» :

a. Pour que $(x-1)(x+1)=0$, [ ] que $x=1$.

b. Pour que $(x-1)(x+1)=0$, [ ] que $x \geqslant -3$.

c. Pour que $\sqrt{x^2}=x$, [ ] que x soit strictement supérieur à 1.

d. Pour que l'expression x^2+x-2 soit non nulle, [ ] que $x \leqslant -2$.

e. Pour que l'expression x^2+x-2 soit strictement négative, [ ] que $x \leqslant 2$.

7 ► Soit x un nombre réel. Compléter le lien entre les assertions de gauche et de droite avec «**nécessaire**» ou «**suffisante**» :

a. Une condition [ ] pour que l'expression $\sqrt{x^2-4}$ soit bien définie est que $x \geqslant 2$.

b. Une condition [ ] pour que l'expression $\ln\left(|x-3|\right)$ soit bien définie est que $x \geqslant 4$.

c. Une condition [ ] pour que $\sqrt{x^2}=-x$ est que x soit strictement négaitif.

8 ► *Lettres grecques*

Compléter le tableau suivant (lettres minuscules) :

nom de la lettre		lambda	phi		psi	delta		gamma
symbole	θ			ε			μ	

Compléter le tableau suivant (lettres majuscules) :

nom de la lettre	Sigma	Delta			
symbole			Λ	Γ	Φ

Exercice 1

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Exercice 2

On considère la suite de nombre réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=4$, $u_1=0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2}=2u_{n+1}+3u_n.$$

Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence double :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n=3\,(-1)^n+3^n.$$

Exercice 3

Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivante :

$$(\mathbf{E}) : \sqrt{x^2-9} = x+2.$$

Exercice 4

On considère trois réels a, b et c vérifiant :

$$0 \leqslant a \leqslant b \qquad \text{et} \qquad 0 < c.$$

1. Soit x un réel. Montrer que le discriminant du trinôme (de variable x) suivant :

$$\mathrm{P}(x) = x^2 - \left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)x + (b-a),$$

est égal à :

$$-\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\left(3\sqrt{b}+5\sqrt{a}\right).$$

2. Déterminer le signe de l'expression $\mathrm{P}(x)$ définie ci-dessus.

3. En déduire l'inégalité suivante :

$$\sqrt{b}-\sqrt{a} \leqslant \frac{1}{c}(b-a)+c.$$

Exercice 5

Dans cet exercice, on considère l'énoncé suivant que l'on note $\mathscr{P}(n)$ où $n \in \mathbb{N}^*$:

> Pour tous nombres réels positifs ou nuls $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on a :
>
> $$x_1 x_2 \cdots x_n \leqslant \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n.$$

1. Vérifier que $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

2. ***a.*** Montrer que pour tous réels positifs a et b, on a : $(a+b)^2 \geqslant 4ab$.

b. En déduire que $\mathscr{P}(2)$ est vraie.

3. ***a.*** Montrer que pour tout réel positif ou nul x, on a : $(2+x)^3 \geqslant 27x$.
Indication : écrire $(2+x)^3 - 27x = (x-1)(x-\alpha)(x-\beta)$ où α et β sont des entiers à déterminer.

b. Montrer que pour tous réels positifs ou nul y et z, on a :

$$(2y+z)^3 \geqslant 27y^2z.$$

c. En exploitant la propriété $\mathscr{P}(2)$, montrer que pour tous réels positifs ou nuls a, b et c, on a :

$$(a+b+c)^3 \geqslant 27abc.$$

d. Montrer que $\mathscr{P}(3)$ est vraie.

4. En utilisant plusieurs fois $\mathscr{P}(2)$, montrer que $\mathscr{P}(4)$ est vraie.

Consignes

- L'énoncé comporte un questionnaire à rendre (en n'oubliant pas d'indiquer son nom dans la case prévue à cet effet) ainsi que les énoncés de cinq exercices.
  Ces derniers peuvent être traités dans un ordre quelconque mais doivent être chacun commencés sur une nouvelle page et les questions doivent être séparées d'une ligne horizontale sur toute la largeur de la page.
- Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.
- La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- Les résultats doivent être mis en valeur et les pages doivent être numérotées.

NOM :

Questionnaire

1 ► Soit $\mathscr{F} = \{-17; -10; -3; 4; 11; 18; 25; 32\}$.
Donner une définition de l'ensemble $\mathscr{F}$ sans avoir à énumérer ses éléments :

2 ► Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant : $\exists y \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = y$.
Que signifie cette propriété ?

3 ► Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Traduire avec des quantificateurs le fait que f ne soit pas la fonction nulle :

4 ► Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Traduire avec des quantificateurs le fait qu'il y ait au moins une valeur prise au moins deux fois par f :

5 ► Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Traduire avec des quantificateurs le fait que f ne soit pas constante sur l'intervalle $[0, 1]$:

6 ► Soit x un nombre réel. Compléter le lien entre les assertions de gauche et de droite avec «**il faut**» ou «**il suffit**» :

a. Pour que $(x-1)(x+1)=0$, [ ] que $x=-1$.

b. Pour que $(x-1)(x+1)=0$, [ ] que $x \leqslant 2$.

c. Pour que $\sqrt{x^2}=x$, [ ] que x soit strictement supérieur à 1.

d. Pour que l'expression x^2+x-2 soit non nulle, [ ] que $x \geqslant 2$.

e. Pour que l'expression x^2+x-2 soit strictement négative, [ ] que $x \geqslant -2$.

7 ► Soit x un nombre réel. Compléter le lien entre les assertions de gauche et de droite avec «**nécessaire**» ou «**suffisante**» :

a. Une condition [ ] pour que l'expression $\sqrt{x^2-4}$ soit bien définie est que $x \geqslant 2$.

b. Une condition [ ] pour que l'expression $\ln\left(|x-3|\right)$ soit bien définie est que $x \geqslant 4$.

c. Une condition [ ] pour que $\sqrt{x^2}=-x$ est que x soit strictement négaitif.

8 ► *Lettres grecques*

Compléter le tableau suivant (lettres minuscules) :

nom de la lettre		theta			delta	gamma	phi	mu
symbole	λ		ψ	ε				

Compléter le tableau suivant (lettres majuscules) :

nom de la lettre	Sigma	Lambda			
symbole			Δ	Γ	Ψ

Exercice 1

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Exercice 2

On considère la suite de nombre réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=4$, $u_1=0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2}=2u_{n+1}+3u_n.$$

Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence double :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n=3\,(-1)^n+3^n.$$

Exercice 3

Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivante :

$$(\mathbf{E}) : \sqrt{x^2-9} = x+2.$$

Exercice 4

On considère trois réels a, b et c vérifiant :

$$0 \leqslant a \leqslant b \qquad \text{et} \qquad 0 < c.$$

1. Soit x un réel. Montrer que le discriminant du trinôme (de variable x) suivant :

$$\mathrm{P}(x) = x^2 - \left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)x + (b-a),$$

est égal à :

$$-\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\left(3\sqrt{b}+5\sqrt{a}\right).$$

2. Déterminer le signe de l'expression $\mathrm{P}(x)$ définie ci-dessus.

3. En déduire l'inégalité suivante :

$$\sqrt{b}-\sqrt{a} \leqslant \frac{1}{c}(b-a)+c.$$

Exercice 5

Dans cet exercice, on considère l'énoncé suivant que l'on note $\mathscr{P}(n)$ où $n \in \mathbb{N}^*$:

> Pour tous nombres réels positifs ou nuls $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on a :
>
> $$x_1 x_2 \cdots x_n \leqslant \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n.$$

1. Vérifier que $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

2. ***a.*** Montrer que pour tous réels positifs a et b, on a : $(a+b)^2 \geqslant 4ab$.

b. En déduire que $\mathscr{P}(2)$ est vraie.

3. ***a.*** Montrer que pour tout réel positif ou nul x, on a : $(2+x)^3 \geqslant 27x$.
Indication : écrire $(2+x)^3 - 27x = (x-1)(x-\alpha)(x-\beta)$ où α et β sont des entiers à déterminer.

b. Montrer que pour tous réels positifs ou nul y et z, on a :

$$(2y+z)^3 \geqslant 27y^2z.$$

c. En exploitant la propriété $\mathscr{P}(2)$, montrer que pour tous réels positifs ou nuls a, b et c, on a :

$$(a+b+c)^3 \geqslant 27abc.$$

d. Montrer que $\mathscr{P}(3)$ est vraie.

4. En utilisant plusieurs fois $\mathscr{P}(2)$, montrer que $\mathscr{P}(4)$ est vraie.

Consignes

- L'énoncé comporte trois exercices.
  Ces derniers peuvent être traités dans un ordre quelconque mais doivent être chacun commencés sur une nouvelle page et les questions doivent être séparées d'une ligne horizontale sur toute la largeur de la page.
- Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.
- La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- Les résultats doivent être mis en valeur et les pages doivent être numérotées.

Exercice 1

On considère les deux fonctions f et g définies pour tout réel x par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right).$$

1. Montrer que la fonction f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier les expressions $f(x) + g(x)$ et $f(x)^2 - g(x)^2$.

3. Étudier la parité de f et g.

4. Étudier la limite en $+\infty$ de f et de g.

5. Montrer que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ puis calculer les dérivées de ces deux fonctions.

6. Dresser le tableau de variations de g.

7. Dresser le tableau de variations de f.

8. Justifier le fait que, pour tout réel y, il existe un et un seul réel x tel que $y = g(x)$.

9. On fixe un réel y. Résoudre l'équation d'inconnue x suivante : $g(x) = y$.

10. On définit une nouvelle fonction h en posant, pour tout réel x :

$$h(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Pourquoi la fonction h est-elle bien définie sur $\mathbb{R}$? Quel est son domaine de dérivabilité ?

11. Étudier la parité de h.

12. Calculer la dérivée de la fonction h puis déterminer les variations de h.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par l'expression :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{2} + 8}.$$

On considère également la suite u donnée par $u_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2}{2} + 8}.$$

1. *Python*

a. Écrire une fonction `f` de paramètre `x` qui corresponde à la fonction f définie ci-dessus.

b. Écrire des instructions permettant de tracer la représentation graphique de `f` sur $[-3,3]$.

2. Étude de f.

a. Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer la dérivée de f.

c. Étudier la parité de f.

d. Établir le tableau de variations complet de f.

e. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) \geqslant x$.

f. Que valent $f(4)$ et $f'(4)$?

g. Tracer l'allure de f (sur $[-2,10]$) ainsi que la tangente à la courbe de f en 4.

3. Étude de (u_n).

a. Calculer u_1.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

c. Justifier que la suite u converge.

4. On cherche maintenant une expression de u_n en fonction de n.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $v_n = u_n^2 - 16$.
Montrer que la suite v est géométrique et préciser sa raison.

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de v_n en fonction de n.

c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n en fonction de n.

d. Quelle est la limite de la suite u ?

Exercice 3

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right).$$

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 2$.

3. En exprimant u_{n+1} en fonction de u_n, étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. On rappelle que l'on a pour tout réel $t > -1$: $\ln(1+t) \leqslant t$.
Déterminer un majorant de la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ et que $\ell \in [2, \mathrm{e}^2]$.

6. Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(\ell).$$

7. Dans cette question, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}$ et on pose pour tout entier $\mathrm{N} \geqslant n$:

$$v_{\mathrm{N}} = \sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2^k}.$$

a. Démontrer que, pour tout entier $\mathrm{N} \geqslant n$:

$$\ln(u_{\mathrm{N}}) - \ln(u_n) \leqslant v_{\mathrm{N}}.$$

b. Montrer que la suite $(v_{\mathrm{N}})_{\mathrm{N}\geqslant n}$ est convergente et que sa limite est égale à $\frac{1}{2^n}$.

c. En déduire que :

$$\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

8. Déduire de la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right).$$

9. On rappelle que l'on a pour tout réel t : $1 + t \leqslant \mathrm{e}^t$.
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \frac{\ell}{2^n}.$$

Consignes

- L'énoncé comporte cinq exercices.
  Ces derniers peuvent être traités dans un ordre quelconque mais doivent être chacun commencés sur une nouvelle page et les questions doivent être séparées d'une ligne horizontale sur toute la largeur de la page.
- Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.
- La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- Les résultats doivent être mis en valeur et les pages doivent être numérotées.

Exercice 1

En utilisant l'algorithme du pivot de Gauss, résoudre le système linéaire suivant :

$$(\mathbf{S}) : \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 2y - z = -2 \\ -x - y + 2z = 4 \end{cases}.$$

Exercice 2

En utilisant l'algorithme du pivot de Gauss, résoudre le système linéaire suivant :

$$(\mathbf{S}) : \begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 2x_4 + 7x_5 = 10 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ 8x_1 - 24x_2 + 4x_3 - 12x_4 - 4x_5 = -8 \\ -3x_1 + 9x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 4 \end{cases}.$$

Exercice 3

On dispose :

- ▷ d'un dé équilibré à 6 faces ;
- ▷ d'une urne U contenant 2 boules noires et 3 boules blanches ;
- ▷ d'une urne V contenant 1 boule noire et 4 boules blanches.

On note Ω un univers et $\mathbb{P}$ une probabilité modélisant cette situation.
On lance le dé : si l'on obtient 5 ou 6 alors on tire une boule dans l'urne U, sinon on tire deux boules dans l'urne V.
On notera :

- ▷ A l'événement «on obtient 5 ou 6 avec le dé» ;
- ▷ N l'événement «on tire une boule noire».

Les résultats seront donnés sous la forme d'une fraction irréductible.

1. Quelle est la probabilité de tirer une boule noire ?

2. Sachant que l'on a tiré une boule noire, quelle est la probabilité que le dé ait donné 5 ou 6 ?

3. Sachant que l'on a tiré une boule noire, quelle est la probabilité que le dé ait donné 3 ?

Exercice 4

Pour tout entier $p \geqslant 3$ et tout réel $x \in [0,1]$, on pose :

$$f_p(x) = x^p - px + 1.$$

1. *Python*

a. Définir en python une fonction `f(p,x)` coorespondant à la fonction f_p définie ci-dessus.

b. Donner les instructions permettant de représenter sur un même dessin les fonctions f_3, f_4 et f_5 sur l'intervalle $[0,1]$.

2. Étudier les variations de f_p sur $[0,1]$.

3. En déduire que l'équation $f_p(x) = 0$ admet une et une seule solution dans $]0,1[$.
On note x_p cette solution de sorte que :

$$\forall p \geqslant 3,\ (x_p)^p = px_p - 1.$$

4. Montrer que :

$$f_{p+1}(x_p) = (x_p)^{p+1} - (x_p)^p - x_p,$$

puis en déduire que $f_{p+1}(x_p) < 0$.

5. En déduire le sens de variation de la suite (x_p) puis qu'elle converge.

6. Montrer que la limite de la suite (x_p^p) est 0.

7. En déduire que : $x_p \sim \frac{1}{p}$.

8. On cherche à déterminer un équivalent de $x_p - \frac{1}{p}$.
Pour tout $p \geqslant 3$, on pose : $\varepsilon_p = px_p - 1$.

a. Justifier que, pour tout $p \geqslant 3$, on a : $\varepsilon_p > 0$ et $\varepsilon_p = \frac{(1+\varepsilon_p)^p}{p^p}$.

b. En déduire que : $0 < \varepsilon_p \leqslant \left(\frac{2}{p}\right)^p$ à partir d'un certain rang.

c. Montrer que $\left(1+\varepsilon_p\right)^p$ a pour limite 1.
Indication : on pourra utiliser le fait que $\ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x > -1$.

d. En déduire un équivalent de ε_p, puis un équivalent de $x_p - \frac{1}{p}$.

Exercice 5

On considère un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et une variable aléatoire réelle X positive.
On note $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ avec $0 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
On note $\mathbb{E}(X)$ l'espérance de X.
On suppose que le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on considère le point M_i dont les coordonnées (u_i, v_i) sont données par :

$$u_i = \sum_{k=1}^{i} \mathbb{P}(X = x_k) \ \text{ et } \ v_i = \frac{1}{\mathbb{E}(X)} \sum_{k=1}^{i} x_k \mathbb{P}(X = x_k).$$

On appelle *courbe de Gini* de X la ligne polygonale obtenue en joignant les points $O, M_1, M_2, \ldots, M_n$.
On note A le point de coordonnées $(1,1)$. On appelle *indice de concentration* le réel noté $I(X)$ égal à deux fois l'aire de la portion du plan comprise entre la courbe de Gini et le segment $[OA]$.
On rappelle que l'aire d'un trapèze est donnée par la formule :

$$\text{Aire du trapèze} = \frac{\big(\text{grande base} + \text{petite base}\big) \times \text{hauteur}}{2}.$$

1. On suppose dans cette question que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

a. Donner les valeurs de x_1, x_2, u_1, u_2, v_1 et v_2 puis représenter la courbe de Gini de X pour $p = 0,7$ et $p = 0,2$.

b. Quel est son indice de concentration ?

c. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires suivant la même loi que X.
On suppose que les événements $(X_1 = 0)$, $(X_1 = 1)$, $(X_2 = 0)$ et $(X_2 = 1)$ sont mutuellement indépendants.

i. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = |X_1 - X_2|$.

ii. Montrer que :
$$I(X) = \frac{\mathbb{E}(Y)}{2\mathbb{E}(X)}.$$

2. On suppose maintenant que X suit une loi uniforme d'univers image $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

a. Démontrer que :
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

b. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, exprimer les réels u_i et v_i en fonction de i et de n.

c. Représenter la courbe de Gini dans le cas où $n = 5$.

d. Vérifier que, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a :
$$v_{i+1} + v_i = \frac{2(i+1)^2}{n(n+1)}.$$

e. Montrer que l'indice de concentration de X est égal à :
$$I(X) = \frac{n-1}{3n}.$$

f. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires suivant la même loi que X.
On suppose que les événements $(X_1 = k)$ et $(X_2 = \ell)$, pour tous k et ℓ dans $[\![1, n]\!]$, sont mutuellement indépendants.

i. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = |X_1 - X_2|$.

ii. Montrer que :
$$I(X) = \frac{\mathbb{E}(Y)}{2\mathbb{E}(X)}.$$

Consignes

- L'énoncé comporte quatre exercices.
  Ces derniers peuvent être traités dans un ordre quelconque mais doivent être chacun commencés sur une nouvelle page et les questions doivent être séparées d'une ligne horizontale sur toute la largeur de la page.
- Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.
- La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- Les résultats doivent être mis en valeur et les pages doivent être numérotées.

Exercice 1

Les questions ci-dessous sont toutes indépendantes.

1. Montrer que $\mathrm{E} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x+y=0 \text{ et } z-t=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une famille génératrice.

2. On considère l'espace vectoriel D des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et on pose :

$$\mathrm{F} = \{f \in \mathrm{D} \ ; \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f''(x) + f'(x) - f(x) = 0\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de D.

3. Soit P le polynôme donné par :

$$\mathrm{P}(x) = x^7 - 4x^6 - x^5 + 18x^4 - 17x^3 - 8x^2 + 17x - 6.$$

Montrer que 1 est une racine de P puis déterminer l'ordre de multiplicité de cette racine (on pourra utiliser des dérivées de P).

Exercice 2

On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et en déduire un polynôme annulateur P de A avec P de degré 2.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer le reste de la division euclidienne de x^n par $\mathrm{P}(x)$.

3. En déduire l'expression de A^n en fonction de A et I_2.

Exercice 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit λ un réel. Montrer que $A - \lambda I_3$ est inversible si et seulement si $\lambda \notin \{-1; 0; 4\}$.

2. Résoudre le système homogène dont la matrice est $A + I_3$.
En déduire un triplet $u \in \mathbb{R}^3$ tel que l'ensemble des solutions de ce système soit $\text{Vect}(u)$.

3. Résoudre le système homogène dont la matrice est A.
En déduire un triplet $v \in \mathbb{R}^3$ tel que l'ensemble des solutions de ce système soit $\text{Vect}(v)$.

4. Résoudre le système homogène dont la matrice est $A - 4I_3$.
En déduire un triplet $w \in \mathbb{R}^3$ tel que l'ensemble des solutions de ce système soit $\text{Vect}(w)$.

5. On note P la matrice dont la première colonne est constituée par les composantes de u, la deuxième par celles de v et la troisième par celles de w.
Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

6. Calculer le produit AP puis le produit $P^{-1}AP$.

7. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

$$A^n = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Exercice 4

On considère une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant le propriété :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ |A[i,i]| > \sum_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} \left|A[i,j]\right|.$$

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $i \in [\![1, n]\!]$.
Donner l'expression de la i-ème composante de la matrice colonne AX.

2. On suppose que $X = (x_1, \ldots, x_n) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ **et que** AX **est nul** et l'on note i_0 **un** indice tel que $\left|x_{i_0}\right|$ soit maximal, c'est-à-dire :

$$\left|x_{i_0}\right| = \max\left\{|x_i|\ ;\ i \in [\![1, n]\!]\right\}.$$

Montrer que l'on a alors :

$$|A[i_0, i_0]|\left|x_{i_0}\right| \leqslant \left(\sum_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i_0\}} \left|A[i_0, j]\right|\right)\left|x_{i_0}\right|.$$

3. Montrer que la relation de la question précédente est en contradiction avec l'hypothèse formulée sur la matrice A.

4. En déduire que la matrice A est inversible.

Consignes

- L'énoncé comporte deux problèmes ; ils peuvent être traités dans un ordre quelconque mais doivent être chacun commencés sur une nouvelle page et les questions doivent être séparées d'une ligne horizontale sur toute la largeur de la page.
- Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.
- La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- Les résultats doivent être mis en valeur et les pages doivent être numérotées.

Problème 1

1. On considère une fonction f définie sur un intervalle $[a,b]$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$.
Expliquer pourquoi l'on peut définir, pour tout entier $k \geqslant 0$, le nombre :

$$\mathrm{M}_k = \max\left\{\left|f^{(k)}(x)\right| \,;\, a \leqslant x \leqslant b\right\}.$$

2. Si n est un entier supérieur ou égal à 1, on subdivise de façon régulière l'intervalle $[a,b]$ en n parties en posant :

$$a_k = a + k\frac{b-a}{n} \text{ avec } k \in [\![0,n]\!].$$

Écrire une fonction python d'entête `subdivision(a,b,n)` qui renvoie la liste des a_k pour $k \in [\![0,n]\!]$. Par exemple :

```
>>> subdivision(0, 1, 5)
[0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0]
>>> subdivision(0, 2, 8)
[0.0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0, 1.25, 1.5, 1.75, 2.0]
```

3. *Question de cours –*
On pose $\mathrm{I} = \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\mathrm{R}_n = \frac{b-a}{n}\Big(f(a_0) + f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_{n-1})\Big) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k).$$

Montrer que :

$$|\mathrm{I} - \mathrm{R}_n| \leqslant \frac{\mathrm{M}_1(b-a)^2}{2n}.$$

4. On pose également pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\mathrm{R}'_n = \frac{b-a}{n}\Big(f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_{n-1}) + f(a_n)\Big) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k)$$

et l'on admet que l'on a également :

$$\left|\mathrm{I} - \mathrm{R}'_n\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}_1(b-a)^2}{2n}.$$

Que peut-on dire de la limite des suites (R_n) et (R'_n) quand n tend vers l'infini ?

5. *Application –*
Déterminer la limite quand n tend vers l'infini de la suite u définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}.$$

6. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\mathrm{T}_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}.$$

Exprimer T_n en fonction de R_n et R'_n puis en déduire la limite de la suite (T_n) quand n tend vers l'infini.

7. Proposer une interprétation géométrique de T_n dans le cas d'une fonction f positive.

8. On suppose dans cette question que φ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle I et que $(\alpha,\beta) \in \mathrm{I}^2$.
En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral pour φ entre α et β, puis entre β et α, montrer que :

$$\varphi(\beta)-\varphi(\alpha) = (\beta-\alpha)\frac{\varphi'(\alpha)+\varphi'(\beta)}{2} - \frac{(\beta-\alpha)^2}{4}\int_\alpha^\beta \varphi'''(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{4}\int_\alpha^\beta \big((\beta-t)^2+(\alpha-t)^2\big)\varphi'''(t)\,\mathrm{d}t.$$

9. En utilisant la question précédente, montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$|\mathrm{I}-\mathrm{T}_n| \leqslant \frac{\mathrm{M}_2}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} \left|(a_{k+1}-t)^2+(a_k-t)^2-(a_{k+1}-a_k)^2\right|\,\mathrm{d}t\right).$$

10. En déduire que :

$$|\mathrm{I}-\mathrm{T}_n| \leqslant \frac{\mathrm{M}_2}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} \left|(t-a_k)(t-a_{k+1})\right|\,\mathrm{d}t.$$

11. Montrer finalement que :

$$|\mathrm{I}-\mathrm{T}_n| \leqslant \frac{\mathrm{M}_2(b-a)^3}{12n^2}.$$

Problème 2

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x) = 1+\ln(1+x).$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O},\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

1. Étudier le sens de variation de f.

2. Définir une fonction python d'entête `f(x)` correspond à f.

3. Donner une équation de la tangente $(\mathscr{D})$ à la courbe $(\mathscr{C})$ en son point d'abscisse 0.

4. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ et la tangente $(\mathscr{D})$.

5. Écrire des instruction python permettant de réaliser cette représentation (*i.e.* la représentation sur une même figure de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{C})$, on ne demande pas de détails «esthétiques»).

6. On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x) = x - f(x)$.
En étudiant la fonction g, montrer que l'équation $f(x) = x$ a une solution unique α, et que α appartient à l'intervalle $[1,3]$.

7. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.
Démontrer que cette suite est bien définie et est croissante.

8. Écrire une fonction python `u(n)` de paramètre un entier naturel `n` et qui renvoie la liste des termes de la suite u pour les indices allant de 0 à `n`.

9. Écrire une fonction python `croissance_u(n)` de paramètre un entier naturel `n` et qui renvoie un booléen : `True` si $u_0, u_1, \ldots, u_n$ sont tous supérieurs ou égaux à 1, `False` sinon.

10. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.

11. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[1,+\infty[$, on a :

$$0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{2}.$$

12. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

13. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

14. En utilisant ce qui précède, écrire une fonction python `approx()` sans argument et qui renvoie une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

15. On suppose que l'unité de longueur est le cm. Calculer l'aire, en cm^2, de l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient :

$$0 \leqslant x \leqslant \alpha \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

On donnera pour cette aire la valeur exacte en faisant intervenir α.

Dans la suite de ce problème, on considère pour tout entier naturel $p \geqslant 1$, la fonction f_p définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f_p(x) = 1 + \ln(x + p).$$

On note $(\mathscr{C}_p)$ la courbe représentative de f_p.

16. Dresser le tableau de variations de f_p.

17. Étudier les positions relatives de $(\mathscr{C}_p)$ et $(\mathscr{C}_{p+1})$.

18. Étudier pour tout entier p supérieur ou égal à 1, le sens de variation de la fonction g_p définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$g_p(x) = x - f_p(x).$$

19. Déduire de cette étude l'existence d'une solution unique α_p pour l'équation $x = f_p(x)$, et le signe de g_p.

20. Démontrer que la suite $(\alpha_p)_{p\geqslant 1}$ est croissante.

21. Établir l'inégalité $\alpha_p \geqslant 1 + \ln p$.

22. Quelle est la limite de la suite $(\alpha_p)_{p\geqslant 1}$?

Consignes

- L'énoncé comporte cinq exercices ; ils peuvent être traités dans un ordre quelconque mais doivent être commencés sur des nouvelles pages et les questions doivent être séparées d'une ligne horizontale sur toute la largeur de la page.
- Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.
- La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- Les résultats doivent être mis en valeur et les pages doivent être numérotées.

Exercice 1

Dans tout l'exercice, il s'agit de répondre aux questions dans le langage python. On suppose que les instructions suivantes ont été exécutées :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

1. Écrire une fonction `de()` sans argument qui simule le lancer d'un dé usuel à 6 faces bien équilibré.
2. Écrire une fonction `depipe()` sans argument qui simule le lancer d'un dé donnant 1 et 2, tous deux avec probabilité $\frac{1}{3}$, donnant 3 avec probabilité $\frac{1}{6}$ et donnant 4, 5 et 6 de façon équiprobable.
3. Écrire une fonction `succession(n)` d'argument un entier naturel non nul `n`, qui simule `n` lancers d'un dé usuel équilibré, et qui renvoie la liste des tirages ainsi que le nombre de 6 obtenus. Par exemple :

```
>>> succession(10)
([2, 2, 1, 4, 3, 5, 1, 5, 5, 6], 1)
>>> succession(10)
([4, 6, 6, 6, 3, 1, 5, 6, 5, 6], 5)
>>> succession(10)
([4, 4, 2, 5, 2, 2, 2, 5, 5, 5], 0)
```

4. Écrire une fonction `jusqua6()` sans argument, qui simule des lancers d'un dé usuel équilibré jusqu'à obtenir un premier 6, et qui renvoie la liste des tirages ainsi que le nombre de tirages effectués jusqu'à obtenir 6. Par exemple :

```
>>> jusqua6()
([2, 6], 2)
>>> jusqua6()
([3, 4, 2, 4, 5, 4, 1, 5, 6], 9)
```

5. Écrire une fonction `repetition()` sans argument, qui simule des lancers d'un dé usuel équilibré jusqu'à obtenir pour la première fois deux lancers successifs avec le même résultat, et qui renvoie la liste des tirages. Par exemple :

```
>>> repetition()
[6, 1, 3, 3]
>>> repetition()
[6, 4, 5, 4, 3, 4, 1, 6, 6]
>>> repetition()
[3, 1, 1]
```

Exercice 2

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{n+2}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.
2. Étudier la nature puis calculer la somme de la série de terme général $u_n = \dfrac{n^2+1}{2^n}$.
3. Étudier la convergence de l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1+t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.
4. Étudier la convergence de l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{2} \frac{\ln(1+t)-t}{\sqrt{t^5+t^6}}\mathrm{d}t$.

Exercice 3

1. Prouver que, pour tout entier $k \geqslant 2$:

$$\sum_{j=2}^{k} \frac{1}{j} \geqslant \ln\left(\frac{k+1}{2}\right).$$

2. Écrire une fonction python `seuil(a)` renvoyant un entier k tel que $\sum_{j=2}^{k} \frac{1}{j} > a$.

Est-ce le plus petit entier k vérifiant cela ?

3. Justifier que :

$$\forall u \in]-\infty, 1[,\ \ln(1-u) \leqslant -u.$$

4. On définit une suite (a_n) par $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier $k \geqslant 2$:

$$a_k = (-1)^{k-1} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2k-3)}{2^k k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{2} \prod_{j=2}^{k} \frac{2j-3}{2j}.$$

Montrer que pour tout $k \geqslant 1$:

$$|a_k| \leqslant \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

5. Soit g la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par : $g(t) = \sqrt{1+t}$.
Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$:

$$\left| g(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k\, t^k \right| \leqslant t^{n+1} \left(\frac{2}{n+2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

6. Soit f la fonction définie pour x réel par :

$$f(x) = \int_0^1 t^{-x} \sqrt{1+t}\, \mathrm{d}t.$$

Déterminer le domaine de définition D de f.

7. Montrer que, pour tout x de D :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1-x}.$$

Exercice 4

Soit p un entier naturel. Pour tout entier naturel n, on note :

$$\mathrm{S}_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{\mathrm{e}^x - 1} \mathrm{e}^{-nx}\, \mathrm{d}x.$$

1. Montrer l'existence de S_n (*i.e.* la convergence de l'intégrale permettant sa définition).

2. On rappelle que la fonction Γ est définie pour tout $x > 0$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$$

et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\Gamma(n) = (n-1)!$.
Pour a et b entiers naturels, avec $b > 0$, on note :

$$\mathrm{T}(a,b) = \int_0^{+\infty} x^a \mathrm{e}^{-bx}\, \mathrm{d}x.$$

Montrer l'existence de $\mathrm{T}(a,b)$ et calculer $\mathrm{T}(a,b)$ en fonction de a et b.

3. Pour $n \geqslant 1$, montrer que pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\frac{1}{\mathrm{e}^x - 1} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-kx} + \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

4. En déduire :

$$\forall\, n \geqslant 1, \mathrm{S}_0 = (p+1)! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+2}} + \mathrm{S}_n.$$

5. Montrer que la suite (S_n) est convergente.

6. En déduire :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}}.$$

Exercice 5

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} \times u_n.$$

1. Montrer que $(u_n)_n$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ que l'on déterminera.

2. Écrire une fonction python `suite_u` telle que `suite_u(n)` renvoie la liste des termes de la suite u pour les indices allant de 0 à `n`.

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \frac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}.$$

Déterminer α pour que la série de terme général $\ln(v_n)$ converge.

4. En déduire que la série de terme général u_n converge.

5. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$2\sum_{k=1}^{n+1} k u_k + 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2\sum_{k=0}^{n} k u_k + 2\sum_{k=0}^{n} u_k.$$

6. En déduire la somme de la série de terme général u_n.

Consignes

- L'énoncé comporte quatre exercices et un problème ; ils peuvent être traités dans un ordre quelconque mais doivent être commencés sur des nouvelles pages et les questions doivent être séparées d'une ligne horizontale sur toute la largeur de la page.
- Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.
- La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- Les résultats doivent être mis en valeur et les pages doivent être numérotées.

Exercice 1 - Python

Les deux questions sont indépendantes.

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$.

Écrire une fonction `seuil()` sans argument qui renvoie le plus petit entier naturel n tel que $S_n \geqslant 1,2$ ainsi que la somme S_n correspondante (on suppose qu'un tel entier existe bien).

```
>>> seuil()
(16, 1.2002220387226146)
```

2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

On admet que les deux suites (T_{2n}) et (T_{2n+1}) sont adjacentes.

Écrire une fonction `approx(p)` qui donne une valeur approchée à 10^{-p} près de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Exercice 2

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \mapsto (x+2y+z, x-y+z)$.

3. Montrer que f est linéaire.

4. Donner la matrice A de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

5. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 3

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ l'application linéaire canoniquement associée à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Donner l'expression de $f(x,y,z,t)$ pour tout $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

7. Déterminer le rang de f.

8. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel de dimension n tel que $u^3 = \mathrm{id}_E$ et $u \neq \mathrm{id}_E$. On pose :

$$E_1 = \ker(u - \mathrm{id}_E) \text{ et } E_2 = \ker(u^2 + u + \mathrm{id}_E).$$

9. Montrer que $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.

10. Calculer $(u^2 + u + \mathrm{id}_E) - (u - \mathrm{id}_E) \circ (u + 2\,\mathrm{id}_E)$.

11. En déduire que $E = E_1 \oplus E_2$.

On suppose désormais et jusqu'à la fin de l'exercice que $n = 2$.

12. Supposons que E_1 et E_2 soient de dimension 1 et considérons deux vecteurs non nuls e_1 et e_2 engendrant ces deux espaces.

Si A est la matrice de u dans la base (e_1, e_2) de E, montrer que le terme situé à la deuxième ligne et deuxième colonne de $A^2 + A + I_2$ est non nul.

13. En déduire que l'hypothèse faite à la question précédente (E_1 et E_2 de dimension 1) est absurde.

14. En déduire les dimensions de E_1 et E_2.

15. Soit v un vecteur non nul de E_2. Montrer que v et $u(v)$ ne sont pas colinéaires.

16. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u soit $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Problème

PARTIE I : Étude d'un exemple

On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

17. La matrice A est-elle inversible ? Quel est son rang ?

18. Déterminer les réels λ tels que $A - \lambda I_3$ ne soit pas inversible.

19. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est A.
Pour chaque valeur de λ trouvée à la question précédente, déterminer $E_\lambda = \ker(u - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.

20. En déduire une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice D de u soit diagonale.

21. Déterminer une relation matricielle entre A et D.

PARTIE II : Étude d'un endomorphisme d'un espace de polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On note $E = \mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel polynômes de degré inférieur ou égal à n.
Dans tout ce qui suit, pour tout entier $k \geqslant 0$, on pourra noter X^k le polynôme $x \mapsto x^k$.
On note $\mathcal{B}$ la base canonique de E c'est-à-dire (avec la notation qui précède) $\mathcal{B} = (1, X, \cdots, X^n)$.
Pour tout polynôme P de E, on note (où l'apostrophe désigne la dérivation) :

$$T(P) = (X(X-1)P')'.$$

Par exemple, si $P = X^2$ alors $P' = 2X$ donc $T(P) = (X(X-1)2X))' = (2X^3 - 2X^2)' = 6X^2 - 4X$.

22. Montrer que T est un endomorphisme de E.

23. Calculer, pour tout k de $[\![0, n]\!]$, $T(X^k)$.

24. En déduire la matrice M de T dans la base $\mathcal{B}$.

25. L'endomorphisme T est-il bijectif ? Quel est le rang de T ?

26. Déterminer les réels λ tels que $T - \lambda\,\mathrm{id}_E$ ne soit pas inversible.

PARTIE III

On conserve les notations de la partie **II** et on considère l'application $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par pour tout $(P,Q) \in E^2$ par :

$$\varphi(P,Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)\mathrm{d}x.$$

27. Montrer que, pour tout $P \in E$, l'application $Q \mapsto \varphi(P,Q)$ est linéaire.

28. Justifier le fait que $\varphi(P,Q) = \varphi(Q,P)$ pour tout $(P,Q) \in E^2$ puis **en déduire** que, pour tout $Q \in E$, l'application $P \mapsto \varphi(P,Q)$ est linéaire.

29. Montrer que, pour tout $P \in E$, $\varphi(P,P) \geqslant 0$ et que $\varphi(P,P) = 0$ si seulement si P est le polynôme nul.

30. Démontrer que, pour tout $(P,Q) \in E^2$, on a :

$$\varphi(T(P),Q) = -\int_0^1 x(x-1)P'(x)Q'(x)\mathrm{d}x.$$

31. En déduire que, pour tout $(P,Q) \in E^2$, on a :

$$\varphi(T(P),Q) = \varphi(P,T(Q)).$$

32. Établir que, pour tout $P \in E$, on a :

$$\varphi(T(P),P) \geqslant 0.$$

33. Déterminer l'ensemble des polynômes P de E tels que : $\varphi(T(P),P) = 0$.

Concours blanc : le 29/05/2024

Le sujet comporte 4 pages. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, ***numéroter*** *les feuilles, mettre* ***son nom sur chaque feuille, commencer chaque exercice en haut d'une page et mettre en valeur les résultats.*** *Faire les questions d'un même exercice dans l'ordre.*
Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

On note $0_{4,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $0_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et, pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\quad \mathrm{id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}(M) = M$ et $\mathrm{tr}(M) = a + d$.
Soit J une matrice non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On définit alors l'application f sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ f(M) = M + \mathrm{tr}(M)J.$$

1. (a) Montrer que $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est linéaire.
   (b) Déterminer une base du noyau de l'application tr et vérifier : $\dim(\ker(\mathrm{tr})) = 3$.
2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. **Dans cette question uniquement,** on considère le cas où $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On note $P : x \mapsto x^2 - 2x + 1$.
   (a) Déterminer la matrice, notée A, de f dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) Déterminer la dimension de $\ker(A - I_4)$ où I_4 est la matrice identité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
   (c) Vérifier que $P(A) = 0$.
   (d) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déduire de la question précédente que :
   s'il existe $X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{4,1}\}$ tel que $AX = \lambda X$ alors λ est une racine de P.
   (e) En déduire que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a : $\ker(A - \lambda I_4) \neq \{0_{4,1}\} \Leftrightarrow \lambda = 1$.
   (f) Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1}.

   On revient au cas général où J désigne une matrice non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $\ker(f - \mathrm{id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}) = \ker(\mathrm{tr})$.
5. En déduire $\dim\left(\ker(f - \mathrm{id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})})\right)$.
6. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $f(J) = \alpha J$. Préciser la valeur de α.
7. **On considère dans cette question** la cas où $\mathrm{tr}(J) \neq 0$.
   (a) Montrer que, dans ce cas, $\ker(f - \mathrm{id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}) \cap \ker(f - \alpha\,\mathrm{id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}) = \{0_{2,2}\}$.
   (b) En déduire que $\dim(\ker(f - \alpha\,\mathrm{id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})})) = 1$.
   (c) En déduire que la famille $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, J \right)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (d) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$.
   (e) En déduire que si $\mathrm{tr}(J) = -1$, f n'est pas bijective.
   (f) Montrer que si $\mathrm{tr}(J) \notin \{0, -1\}$ alors f est bijective
8. **On considère dans cette question** la cas où $\mathrm{tr}(J) = 0$.
   (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que si $f(M) = \lambda M$ alors $\mathrm{tr}(M) = 0$.
   (b) Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\quad$ si $f(M) = \lambda M$ alors $M = 0_{2,2}$.
   (c) En déduire que $\dim(\ker(f)) = 0$.
9. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{tr}(J)$ pour que f soit bijectif.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, p désigne un réel de $]0;1[$ et on pose $q = 1-p$.

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

On considère en particulier une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}(X=k) = q^k p = (1-p)^k p.$$

Partie A :

1. Montrer que la variable aléatoire $Y = X+1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
2. En déduire que X admet une espérance et une variance, et préciser $E(X)$ et $V(X)$.
3. Écrire une fonction `simule_X` en python de paramètre p pour qu'elle renvoie une simulation de X.

Partie B :

Un casino a conçu une nouvelle machine à sous dont le fonctionnement est le suivant :

- le joueur introduit un nombre k de jetons de son choix ($k \in \mathbb{N}$), puis il appuie sur un bouton pour activer la machine ;
- si $k = 0$, alors la machine ne reverse aucun jeton au joueur ;
- si $k \geq 1$, alors la machine définit k variables aléatoires $X_1, \ldots, X_k$ toutes indépendantes et de même loi que la variable aléatoire X étudiée dans la partie A, et reverse au joueur $X_1 + \cdots + X_k$ jetons ;
- les fonctionnements de la machine à chaque activation sont indépendants les uns des autres et ne dépendent que du nombre de jetons introduits.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Z_n la variable aléatoire égale au nombre de jetons dont dispose le joueur après n activations de la machine.
On suppose que le joueur commence avec 1 seul jeton, donc $Z_0 = 1$.
On remarque, en particulier, que Z_1 suit la même loi que X.

4. Recopier et compléter, en python, la fonction suivante de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et un réel p, afin qu'elle simule l'expérience aléatoire et renvoie la valeur de Z_n.
   Cette fonction devra utiliser la fonction `simule_X` définie précédemment.

```
def simule_Z(n,p):
  z=1
  for i in range(n):
    s=0
    for j in range(z):
      ......
    z=......
  return ......
```

   On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n la probabilité que le joueur n'ait plus de jeton après n activations de la machine ;
   ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \mathrm{P}(Z_n = 0)$.
   On note également R l'évènement : "le joueur finit par ne plus avoir de jeton".

5. (a) Préciser les valeurs u_0 et u_1.
   (b) Comparer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les évènements $(Z_n = 0)$ et $(Z_{n+1} = 0)$.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et convergente.

   On notera dans la suite de l'exercice $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

6. Justifier que $\mathrm{P}(R) = \ell$.

7. (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $\mathrm{P}_{(Z_1=k)}(Z_2 = 0) = (u_1)^k$.

On admet que, pour tout $(n,k)\in\mathbb{N}^2$, on a $\quad \mathrm{P}_{(Z_1=k)}(Z_{n+1}=0)=(u_n)^k$.

(b) En déduire : $\quad \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\dfrac{p}{1-qu_n}$.

8. (a) Montrer que ℓ vérifie : $\quad (\ell-1)(q\ell-p)=0$.

(b) On suppose $p\geq\dfrac{1}{2}$. Montrer que $\quad \mathrm{P}(R)=1$.

(c) On suppose $p<\dfrac{1}{2}$. Montrer que $\quad \forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in\left[0;\dfrac{p}{q}\right]$. $\quad$ En déduire $\quad \mathrm{P}(R)<1$.

(d) Expliquer pourquoi le casino préfèrera choisir p dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$.

Partie C :

On suppose à présent que $p\geq\dfrac{1}{2}$.
Le casino cherche la valeur p pour que le joueur joue le plus longtemps possible dans le casino et ainsi, dépense plus d'argent dans ses consommations au bar.
On note T la variable aléatoire égale au nombre d'activations de la machine effectuées par le joueur lorsque, pour la première fois, celui-ci n'a plus de jeton.
On pose, $\quad \forall n\in\mathbb{N},\ v_n=1-u_n$.

9. Justifier que $\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\mathrm{P}(T\leq n)\quad$ puis que $\quad \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \mathrm{P}(T=n)=v_{n-1}-v_n$.

10. Montrer que $\forall N\in\mathbb{N}^*$: $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{N} n\mathrm{P}(T=n)=\left(\sum_{n=0}^{N-1} v_n\right)-Nv_N$.

11. On suppose dans cette question que $p=\dfrac{1}{2}$.

(a) Montrer que, $\quad \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\dfrac{n}{n+1}$.

(b) En déduire que la variable aléatoire T n'admet pas d'espérance.

12. On suppose maintenant que $p>\dfrac{1}{2}$.

On pose, $\forall n\in\mathbb{N},\quad w_n=\dfrac{1-u_n}{\frac{p}{q}-u_n}$.

(a) Montrer que $\quad \forall n\in\mathbb{N},\ w_{n+1}=\dfrac{q}{p}w_n$.

(b) En déduire que $\quad \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}$, $\quad$ puis que $\quad \forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq v_n\leq\left(\dfrac{q}{p}\right)^n$.

(c) Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance et que l'on a $E(T)\leq\dfrac{1}{1-\frac{q}{p}}$

13. Quelle(s) valeur(s) de p recommanderiez-vous au casino ?

Exercice 3

Les résultats de la partie 1 peuvent être admis pour répondre à la partie 2.

Partie 1

On note $E = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \big| \forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = f(x)\}$ et $f_1 : x \mapsto \exp(-x)$.
On admet que $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_1[x]$ sont des espaces vectoriels.

1. Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\text{Vect}(\exp, f_1) \subset E$.
3. Montrer que $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}^2 \\ f & \mapsto & (f(0), f'(0)) \end{array}$ est surjective.
   On admet que φ est injective.
4. Déduire des questions précédentes que $(\exp, f_1)$ est une base de E.

Partie 2

On se propose de déterminer s'il existe des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + \int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t \qquad (*)$$

5. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ vérifie l'égalité (*).
6. Montrer que l'égalité (*) est équivalente à l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + \int_0^x (x-u)f(u)\mathrm{d}u \qquad (**)$$

7. On suppose dans cette question qu'une fonction f, continue sur $\mathbb{R}$, est solution de ce problème.
   (a) Déterminer $f(0)$.
   (b) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^x f(u)\mathrm{d}u$$

   (c) Déterminer $f'(0)$.
   (d) Déduire de la question 7b., que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que $f \in E$.
   (e) Montrer que l'égalité (*) a une unique solution qui est la fonction g.