CHAPITRE

# II

# GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES ET LES FONCTIONS

**Sommaire**


A Suites de nombres réels . . . . . **2**
A.1 Définition d'une suite . . . . . 2
A.2 Opérations et vocabulaire relatif aux suites . . . . . 3
A.3 Quelques situations usuelles . . . . . 5
B Généralités sur les fonctions . . . . . **10**
B.1 Représentation d'une fonction . . . . . 10
B.2 Composition de fonctions . . . . . 11
B.3 Opérations sur les fonctions . . . . . 12
B.4 Propriétés globales . . . . . 14
B.5 Notions intuitives de limites, continuité et dérivabilité . . . . . 16
B.6 Complément pour l'étude d'une fonction : notion de droite asymptote à un graphe . . . . . 20
C Propriétés des fonctions usuelles de référence . . . . . **23**
C.1 Fonction valeur absolue . . . . . 23
C.2 Fonction partie entière . . . . . 23
C.3 Fonctions polynomiales et rationnelles . . . . . 23
C.4 Fonction exponentielle . . . . . 23
C.5 Fonction logarithme népérien . . . . . 25
C.6 Fonctions puissances . . . . . 27
C.7 Fonctions circulaires . . . . . 28

# A - Suites de nombres réels

## A.1 - Définition d'une suite

▹ Tout d'abord, on rappelle qu'une ***fonction*** $f$ se note :

$$f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}, x \mapsto f(x) \qquad \text{ou} \qquad f : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array},$$

ce qui se lit « $f$, de E dans F, qui à $x$ associe $f(x)$ ». Bien entendu la lettre $x$ peut être remplacée par $t, y, u, \ldots$
Dans le cas où $f(x)$ a un sens pour tout $x$ dans E, on dit que $f$ est une ***application*** et que E est l'***ensemble de définition*** de $f$, on dit que $f$ est ***définie sur*** E. L'ensemble F est appelé l'***ensemble d'arrivée*** de $f$, on dit que $f$ est ***à valeurs dans*** F ou que $f$ ***prend ses valeurs dans*** F ; on dit aussi que $f$ ***va de*** E ***dans*** F.
▹ Lorsqu'on a une égalité $f(x) = y$ (avec $x \in \mathrm{E}$ et $y \in \mathrm{F}$), on dit que $y$ est ***l'image*** de $x$ par $f$ et que $x$ est ***un antécédent*** (ou ***une préimage***) de $y$ par $f$.
▹ Si A est une partie de E alors l'application $f_{|\mathrm{A}} : \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est appelée ***la restriction*** de $f$ à A et, inversement, on dit que $f$ est ***un prolongement*** de $f_{|\mathrm{A}}$ à E.
Enfin, on note $f(\mathrm{A})$ la partie de F définie par :

$$f(\mathrm{A}) = \Big\{ f(x); x \in \mathrm{A} \Big\} \quad i.e. \quad f(\mathrm{A}) = \Big\{ y \in \mathrm{F} \ ; \ \exists x \in \mathrm{A} \ / \ f(x) = y \Big\}$$

et on dit que $f(\mathrm{A})$ est l'***image (directe)*** de la partie A par l'application $f$.

**Exemples**

**1 ►** On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$.
L'ensemble de définition de $f$ est $[0,+\infty[$ et $f$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ (bien que les valeurs négatives ne soient pas *atteintes* par $f$). Comme $f(4) = \sqrt{4} = 2$, on peut dire que 2 est l'image de 4 par $f$.
On a par exemple : $f([0,4]) = [0,2]$, $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$,...

**2 ►** L'ensemble de définition de la fonction $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 + 1 \end{array}$ est $\mathbb{R}$ et $g$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$. Il est de plus aisé de vérifier que $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

▹ Une ***suite*** (réelle) est une application $u : \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n \end{array}$ où A est une partie de $\mathbb{N}$ (ou de $\mathbb{Z}$).
Généralement on a $\mathrm{A} = \mathbb{N}$, $\mathrm{A} = \mathbb{N}^*$ ou $\mathrm{A} = \{n \in \mathbb{N} \ ; \ n \geqslant n_0\}$ [1]
On note $u = (u_n)$ pour désigner cette suite ou bien (selon le cas) $(u_n)_n$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\geqslant 1}$, $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.
On dit que $u_n$ est le ***terme général*** de la suite $u$.
Il y a plusieurs manières de définir une suite :

- soit on donne une *formule explicite* dans laquelle $u_n$ s'exprime en fonction de $n$ ;
- soit on donne un ou plusieurs des premiers termes de la suite ainsi qu'une *relation de récurrence* permettant de calculer les termes de proche en proche ;
- soit le terme $u_n$ est définie *implicitement* (par exemple comme solution d'une équation dépendant de $n$).

1. La plupart des résultats seront énoncés avec $\mathrm{A} = \mathbb{N}$ et s'adaptent sans difficulté aux autres cas.

**Exemples**

**1 ►** La suite $u$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n^2 - 1$ peut s'écrire $(n^2-1)_{n\in\mathbb{N}}$.

**2 ►** La suite $u$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \frac{1}{n}$ peut s'écrire $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$.

**3 ►** Définissons une suite $u$ de la façon suivante : on pose $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}.$$

alors les premiers termes de cette suite sont :

$$u_0 = 0\ ,\ u_1 = \sqrt{2}\ ,\ u_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}\ ,\ u_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\ ,\ u_4 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\ ,\ldots$$

**4 ►** La suite de Fibonacci $(\mathrm{F}_n)$ est définie par $\mathrm{F}_0 = 1$, $\mathrm{F}_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n.$$

Ses premiers termes sont :

$$\mathrm{F}_0 = 1\ ,\ \mathrm{F}_1 = 1\ ,\ \mathrm{F}_2 = 2\ ,\mathrm{F}_3 = 3\ ,\ \mathrm{F}_4 = 5\ ,\ \mathrm{F}_5 = 8\ ,\ \mathrm{F}_6 = 13\ ,\ldots$$

## A.2 - Opérations et vocabulaire relatif aux suites

Tout d'abord, si $u$ et $v$ sont deux suites et $\lambda$ est un réel alors :

- On appelle *somme* des suites $u$ et $v$ la suite $w$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_n + v_n$. On la note $u+v$.
- On appelle *produit* des suites $u$ et $v$ la suite $w$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_n v_n$. On la note $uv$.
- On appelle *produit* de la suite $u$ *par le réel* $\lambda$ la suite $w$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \lambda u_n$. On la note $\lambda u$.
- Si $v_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors on appelle *quotient* de la suite $u$ par la suite $v$, la suite $w$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \frac{u_n}{v_n}$. On la note $\frac{u}{v}$.

| **On dit que la suite $u$ est** | **lorsque** |
|---|---|
| majorée | |
| minorée | |
| bornée | |
| constante | |
| croissante | |
| décroissante | |
| monotone | |
| strictement croissante | |
| strictement décroissante | |
| strictement monotone | |

**Exemples**

**1 ►** Soit $u$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \frac{1}{n}$.

**2 ►** Soit $v$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \frac{n^n}{n!}$.

**3 ►** La suite $w$ définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante.

## Remarques

**1 ►** La suite $u$ est bornée si et seulement si :

$$\exists K \geqslant 0 \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, -K \leqslant u_n \leqslant K,$$

autrement dit si et seulement si la suite $|u|$ est majorée :

$$\exists K \geqslant 0 \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant K.$$

**2 ►** La suite $u$ est constante si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_{n+1}.$$

En effet, il suffit alors de démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0$.

**3 ►** Une suite est dite *stationnaire* lorsqu'elle devient constante à partir de quelques termes *i.e.* lorsque :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geqslant n_0, \ u_n = u_{n_0}.$$

Enfin, il sera pratique d'utiliser par la suite la terminologie suivante. On considère une expression $\mathcal{P}(n)$ dépendant de $n \in \mathbb{N}$. On dit que $\mathcal{P}(n)$ est vraie ***à partir d'un certain rang*** ou ***pour $n$ assez grand*** lorsqu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour tous les entiers $n \geqslant n_0$.

**Exemples**

**1 ►** La propriété « $n^2 > 30$ » est vraie à partir d'un certain rang (ce rang est $n_0 = 6$).

**2 ►** Une suite stationnaire est une suite constante à partir d'un certain rang.

**3 ►** Une suite est majorée si et seulement si elle l'est à partir d'un certain rang.
En effet, si $u$ est majorée par M à partir du rang $n_0$ alors $\max\left\{M, u_0, u_1, \dots, u_{n_0-1}\right\}$ est un majorant de $u$.

**4 ►** De même, une suite est minorée si et seulement si elle l'est à partir d'un certain rang et une suite est bornée si et seulement si elle l'est à partir d'un certain rang.

# A.3 - Quelques situations usuelles

## *A.3.a - Suites arithmétiques*

**Définition II-1**

Soit $u = (u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite de nombres réels.
On dit que $u$ est une ***suite arithmétique*** lorsqu'il existe un réel $b$, appelé *raison* de la suite, tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} = u_n + b.$$

**Proposition II-2**

Soit $u = (u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite arithmétique de nombres réels, de raison $b$.

1. Pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a : $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)b$.
2. Si $b = 0$ alors la suite $u$ est constante.
   Si $b > 0$ alors la suite $u$ est strictement croissante.
   Si $b < 0$ alors la suite $u$ est strictement décroissante.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_{n_0+k} = (k+1)\frac{u_{n_0} + u_{n_0+k}}{2}.$$

***Démonstration***

### *A.3.b - Suites géométriques*

**Définition II-3**

Soit $u = (u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite de nombres réels.
On dit que $u$ est une ***suite géométrique*** lorsqu'il existe un réel $a$, appelé *raison* de la suite, tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} = a u_n.$$

**Proposition II-4**

Soit $u = (u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite géométrique de nombres réels, de raison $a$.

**1.** Pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a : $u_n = u_{n_0} a^{n-n_0}$.

**2.** Si $a = 1$ ou $u_{n_0} = 0$ alors la suite $u$ est constante.
Si $a = 0$ et $u_{n_0} \neq 0$ alors la suite est stationnaire (à partir du rang $n_0 + 1$).
Si $a > 1$ et $u_{n_0} > 0$ alors la suite $u$ est strictement croissante.
Si $a > 1$ et $u_{n_0} < 0$ alors la suite $u$ est strictement décroissante.
Si $0 < a < 1$ et $u_{n_0} > 0$ alors la suite $u$ est strictement décroissante.
Si $0 < a < 1$ et $u_{n_0} < 0$ alors la suite $u$ est strictement croissante.
Si $a < 0$ alors la suite $u$ n'est pas monotone.

**3.** Si $a \neq 1$ alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_{n_0+k} = u_{n_0} \frac{1 - a^{k+1}}{1 - a}.$$

Si $a = 1$ alors cette somme est égale à $(k+1)u_{n_0}$.

***Démonstration***

### *A.3.c - Suites arithmético-géométriques*

**Définition II-5**

Soit $u = (u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels.
On dit que $u$ est une ***suite arithmético-géométrique*** lorsqu'il existe des réels $a$ et $b$, avec $a \neq 1$, tels que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} = au_n + b.$$

**Proposition II-6**

Soit $u = (u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels arithmético-géométrique *i.e.* il existe des réels $a$ et $b$ avec $a \neq 1$ tels que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} = au_n + b.$$

Soit $\ell$ un réel tel que $\ell = a\ell + b$ alors la suite $(u_n - \ell)_{n\geqslant n_0}$ est géométrique de raison $a$ ; on a donc :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n = \ell + a^{n-n_0}\Big(u_{n_0} - \ell\Big).$$

***Démonstration***

Tout d'abord, notons que le fait que $a \neq 1$ induit que l'équation $ax + b = x$ *i.e.* $(a-1)x + b = 0$ admet une unique solution : $\ell = \dfrac{b}{1-a}$.
On déduit de la relation initiale :

$$\begin{aligned}\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} - \ell &= au_n + b - \ell \\ &= au_n + b - (a\ell + b) \\ &= a(u_n - \ell)\end{aligned}$$

ce qui montre que la suite $(u_n - \ell)_{n\geqslant n_0}$ est géométrique de raison $a$ et la fin de la proposition est alors évidente.

### *A.3.d - Suites définies par une relation de récurrence linéaire d'ordre 2*

**Proposition et définition II-7**

On dit qu'une suite réelle $u = (u_n)_{n\geqslant n_0}$ vérifie une *relation de récurrence linéaire d'ordre 2* lorsqu'il existe des réels $a$ et $b$, avec $(a,b) \neq (0,0)$, tels que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On appelle *équation caractéristique* de la suite l'équation d'inconnue $r$ suivante :

$$r^2 = ar + b.$$

1. Si l'équation $r^2 = ar + b$ admet deux racines réelles distinctes $r_1$ et $r_2$ alors il existe des réels $\lambda$ et $\mu$ tels que :
$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$
2. Si l'équation $r^2 = ar + b$ admet une racine réelle (double) $r$ alors il existe des réels $\lambda$ et $\mu$ tels que :
$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n = (\lambda n + \mu) r^n.$$

Dans tous les cas, les coefficients $\lambda$ et $\mu$ peuvent être calculés à l'aide des valeurs $u_0$ et $u_1$.

***Exercice C-32***

Les suites données par leur terme général $u_n$ ci-dessous sont-elles bornées ?

1. $u_n = \dfrac{3}{2^n}$ ;
2. $u_n = \left((-1)^n + 1\right) n$ ;
3. $u_n = \dfrac{n-1}{2n+1}$ ;
4. $u_n = \dfrac{n^2 - 2n + 3}{n^2 + n + 1}$ ;
5. $u_n = 2^n - 3^n$ ;
6. $u_n = \sin(n^2) - 3\dfrac{\sqrt{n}}{n}$.

***Exercice C-33***

1. Montrer que la suite $u$ donnée par $u_0 = 1$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1},$$
est minorée par 0 et majorée par 2.
2. Montrer que la suite $v$ donnée par $v_0 = 0$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + 2,$$
est minorée par 0 et majorée par 3.
3. Montrer que la suite $w$ donnée par $w_0 = 1$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = 1 + \frac{1}{w_n},$$
est bornée.
4. Montrer que la suite $x$ donnée par $x_0 = 12$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \sqrt{x_n + 4},$$
est bornée.
5. Montrer que la suite $y$ donnée par $y_0 = 8$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ y_{n+1} = -\frac{2}{5}y_n + 7,$$
est bornée.

***Exercice C-34***

On considère la suite $u$ donnée par $u_0 = -1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{3+2u_n}{2+u_n} \text{ et } v_n = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}.$$

Montrer que la suite $v$ est géométrique et exprimer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$.

***Exercice C-35***

Montrer qu'une suite périodique est bornée.

***Exercice C-36***

Montrer que la somme et le produit de deux suites bornées sont bornées.

***Exercice C-37***

Étudier la monotonie des suites définies par les expressions ci-dessous.

1. $u_n = n^2 - 3n + 2$ ;
2. $u_n = -3n^2 + 2n + 2$ ;
3. $u_n = \dfrac{n-2}{2n+3}$ ;
4. $u_n = \dfrac{-3n+1}{n+1}$ ;
5. $u_n = \dfrac{2^n}{n}$ ;
6. $u_n = \dfrac{3^n}{n!}$ ;
7. $u_n = \dfrac{3^n}{2^n+1}$ ;
8. $u_n = \dfrac{2^n}{2^n+n^2}$ ;
9. $u_n = \dfrac{(n+1)^n}{n!}$ ;
10. $u_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$.

***Exercice C-38***

Étudier la monotonie des suites $u$ définies par :

1. $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$ ;
2. $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 5$ ;
3. $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 1}$ ;
4. $u_0 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$.

***Exercice C-39***

On définit une suite $u$ par $u_0 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n^2 + 2u_n + 1.$$

Démontrer que cette suite est périodique.

***Exercice C-40***

Soit $u$ et $v$ les suites données par $u_1 = 12$, $v_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

1. On définit la suite $w$ par $w_n = u_n - v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   ***a.*** Démontrer que $w$ est une suite géométrique.
   ***b.*** Exprimer $w_n$ en fonction de $n$.
2. Démontrer que la suite $u$ est décroissante et la suite $v$ est croissante.
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n \geqslant v_n$.
   En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :
   $$u_1 \geqslant u_n \geqslant v_n \geqslant v_1.$$
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $t_n = 3u_n + 8v_n$.
   Démontrer que $(t_n)$ est une suite constante.

***Exercice C-41***

Montrer qu'une suite est arithmétique si et seulement si elle vérifie la propriété suivante : « chaque terme est la moyenne du terme qui le précède et de celui qui le suit. »

***Exercice C-42***

Exprimer en fonction de $n$, le terme général de la suite $u$ donnée par :

1. $u_0 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 3$ ;
2. $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 6u_n - 5$.

***Exercice C-43***

Exprimer en fonction de $n$, le terme général de la suite $u$ donnée par :

1. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
   $$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n.$$
2. $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
   $$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

# B - Généralités sur les fonctions

## B.1 - Représentation d'une fonction

On suppose le plan muni d'un repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

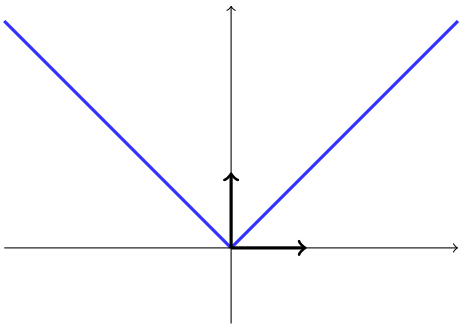
Si $f$ est une applications définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ alors on appelle *représentation graphique*, ou *graphe* de $f$, l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$ où $x \in \mathscr{D}$.
Cette courbe admet donc $y = f(x)$ pour équation.

Dans la pratique, le repère est toujours orthogonal et, le plus souvent, orthonormal.

**Exemples**

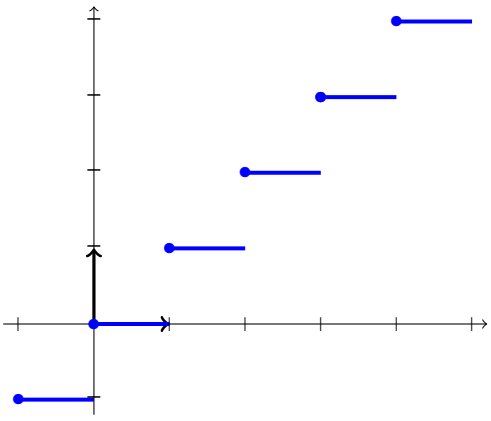
**1 ►** La fonction valeur absolue est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}.$$



**2 ►** On rappelle que, pour tout réel $x$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$ ; cet entier $n$ est appelé la *partie entière* de $x$ et est noté $\lfloor x \rfloor$.
On peut donc définir une *fonction partie entière* :

$$\begin{array}{rccc} \lfloor \cdot \rfloor : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}.$$

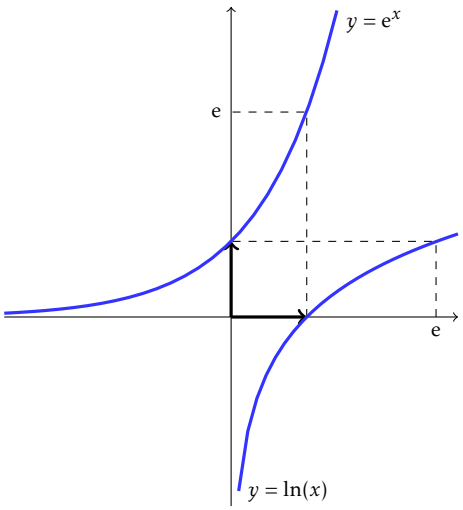


**3 ►** On représente ci-contre les fonctions :

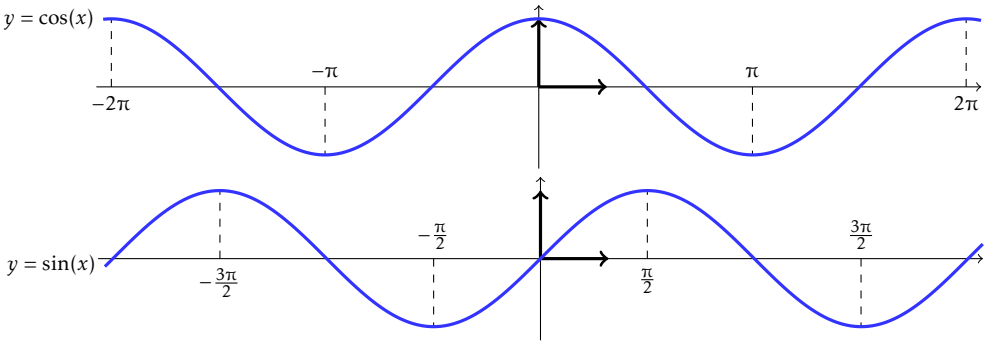
$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*, x \mapsto \mathrm{e}^x$$

et :

$$\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x).$$



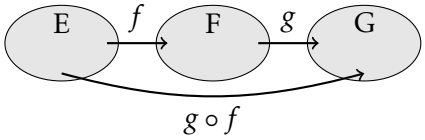

**4 ►** Les fonctions *cosinus* et *sinus* sont définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[-1, 1]$.




## B.2 - Composition de fonctions

Considérons trois ensembles E, F et G et deux applications $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$.
On appelle *application composée* de $f$ par $g$ la fonction, notée $g \circ f$ (on lit « $g$ *rond* $f$ »), et définie par :

$$g \circ f : \mathrm{E} \to \mathrm{G}, x \mapsto (g \circ f)(x) = g\Big(f(x)\Big).$$




**Exemples**

**1 ►** On considère les deux fonctions : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x + 1$.
La fonction $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donnée par :

**2 ►** On considère les deux fonctions : $f : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x)$ et $g : \mathbb{R} \to ]0, +\infty[, x \mapsto \mathrm{e}^x$.
La fonction $g \circ f : ]0, +\infty[ \to ]0, +\infty[$ est donnée par :

**3 ►** On considère les deux fonctions : $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[, x \mapsto x^2$ et $g : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$.
La fonction $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donnée par :

et la fonction $f \circ g : [0, +\infty[ \to [0, +\infty[$ est donnée par :

## B.3 - Opérations sur les fonctions

◇ Si $f$ et $g$ sont deux applications, définies sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, et $\lambda$ est un réel alors :

- la *somme* de $f$ et $g$ est l'application notée $f+g$ et définie par : $\forall x \in \mathscr{D},\ (f+g)(x) = f(x)+g(x)$ ;
- le *produit* de $f$ et $g$ est l'application notée $fg$ et définie par : $\forall x \in \mathscr{D},\ (fg)(x) = f(x)\times g(x)$ ;
- le *produit* de $f$ *par le réel* $\lambda$ est l'application notée $\lambda f$ et définie par : $\forall x \in \mathscr{D},\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ ;
- lorsque $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathscr{D}$, le *quotient* de $f$ par $g$ est l'application notée $\frac{f}{g}$ et définie par :

$$\forall x \in \mathscr{D},\ \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

◇ On suppose que $f$ est définie sur un intervalle I (ou une réunion d'intervalles) et à valeurs réelles, on dit que :

- $f$ est *majorée* lorsque $f(\mathrm{I})$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$ c'est-à-dire :

$$\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \leqslant \mathrm{M};$$

- $f$ est *minorée* lorsque $f(\mathrm{I})$ est une partie minorée de $\mathbb{R}$ c'est-à-dire :

$$\exists m \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in \mathrm{I},\ m \leqslant f(x);$$

- que $f$ est *bornée* lorsque $f$ est majorée et minorée c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} f \text{ bornée} &\iff \exists (m,\mathrm{M}) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \forall x \in \mathrm{I}, m \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M} \\ &\iff \exists \mathrm{K} \geqslant 0 \,/\, \forall x \in \mathrm{I}, -\mathrm{K} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{K} \\ &\iff \exists \mathrm{K} \geqslant 0 \,/\, \forall x \in \mathrm{I}, |f(x)| \leqslant \mathrm{K}. \end{aligned}$$

**Exemples**

**1 ►** La fonction exponentielle est minorée par 0 mais n'est pas majorée.

**2 ►** Les fonctions cos et sin sont bornées (par $-1$ et 1).

◇ On rappelle également que si $f$ est définie sur un intervalle I et à valeurs réelles, alors on dit que :

- $f$ est *croissante* sur I lorsque :

$$\forall (u,v) \in \mathrm{I}^2,\ \Big(u < v \Rightarrow f(u) \leqslant f(v)\Big);$$

- que $f$ est *strictement croissante* sur I lorsque :

$$\forall (u,v) \in \mathrm{I}^2,\ \Big(u < v \Rightarrow f(u) < f(v)\Big);$$

- que $f$ est *décroissante* sur I lorsque :

$$\forall (u,v) \in \mathrm{I}^2,\ \Big(u < v \Rightarrow f(u) \geqslant f(v)\Big);$$

- que $f$ est *strictement décroissante* sur I lorsque :

$$\forall (u,v) \in \mathrm{I}^2,\ \Big(u < v \Rightarrow f(u) > f(v)\Big);$$

- que $f$ est *monotone* sur I lorsque $f$ est croissante sur I ou décroissante sur I ;
- que $f$ est *strictement monotone* sur I lorsque $f$ est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I ;
- que $f$ est *constante* sur I lorsque :

$$\forall (u,v) \in \mathrm{I}^2,\ f(u) = f(v).$$

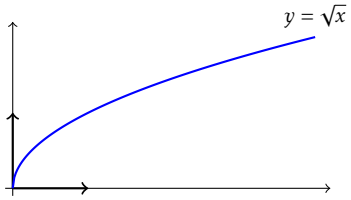
Notons qu'une application constante est monotone puisqu'elle est à la fois croissante et décroissante.

**Exemples**

**1 ►** La fonction :

$$[0,+\infty[ \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$$

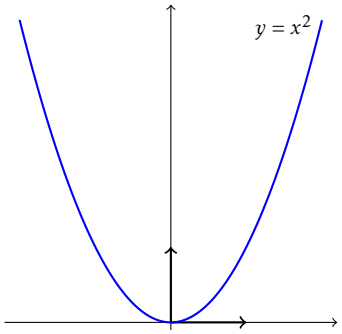
est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.




**2 ►** La fonction :

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$

est strictement décroissante sur $]-\infty,0]$ et strictement croissante sur $[0,+\infty[$.
En revanche, elle n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.



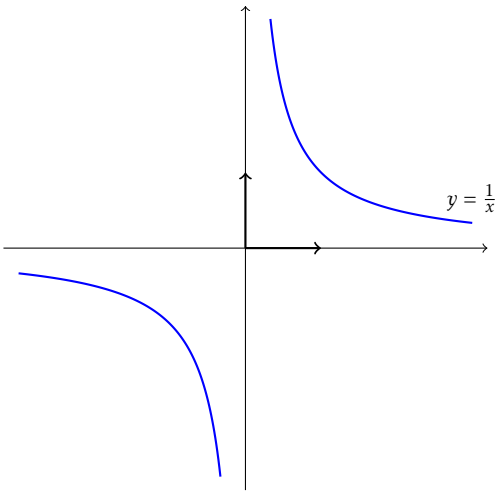

**3 ►** La fonction :

$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*, x \mapsto \frac{1}{x}$$

est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.
Il faut prendre garde, en revanche, à ne pas dire que $f$ est « décroissante sur $\mathbb{R}^*$ » puisque l'on a par exemple :

$$f(-1) = -1 < 1 = f(1),$$

alors que $-1 < 1$.



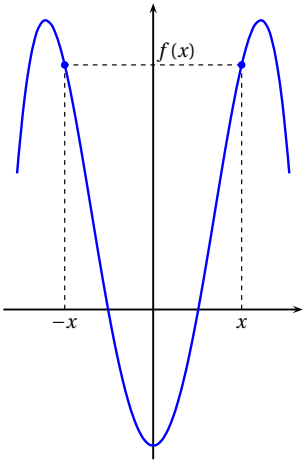
## B.4 - Propriétés globales

▹ Soit $f$ une application définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles avec $\mathscr{D}$ est symétrique par rapport à 0 (*i.e.* si $x \in \mathscr{D}$ alors $-x \in \mathscr{D}$).

On dit que $f$ est *paire* lorsque :

$$\forall x \in \mathscr{D},\ f(-x) = f(x).$$

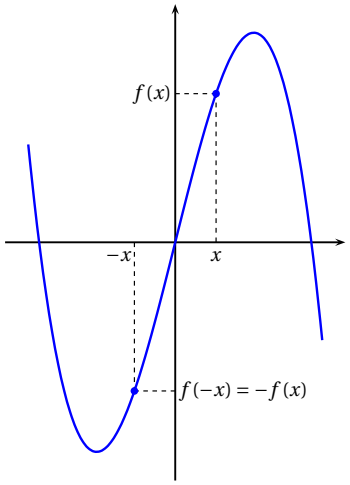
L'application $f$ est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.




On dit que $f$ est *impaire* lorsque :

$$\forall x \in \mathscr{D},\ f(-x) = -f(x).$$

L'application $f$ est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine O du repère.




**Exemples**

**1** ► La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ est paire sur $\mathbb{R}$.
En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-x \in \mathbb{R}$ et $(-x)^2 = x^2$ *i.e.* $f(-x) = f(x)$.

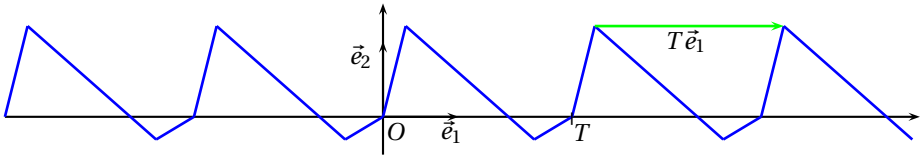
**2** ► La fonction $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*, x \mapsto= \frac{1}{x}$ est impaire sur $\mathbb{R}^* = ]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $-x \in \mathbb{R}^*$ et $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$ *i.e.* $f(-x) = -f(x)$.

**3** ► La fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire.
En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-x \in \mathbb{R}$ et : $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$.

▹ Soit $f$ une application définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.
On dit que $f$ est *périodique* lorsqu'il existe un réel $\mathrm{T} > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathcal{D},\ x \pm \mathrm{T} \in \mathcal{D} \text{ et } f(x + \mathrm{T}) = f(x).$$

On dit alors que $f$ est T-*périodique* ou *périodique de période* T et que T est *une période* de $f$.
Dans ce cas, son graphe s'obtient en traçant le graphe sur n'importe quel intervalle de longueur T puis en effectuant des translations de vecteurs $\mathrm{T}\vec{e_1}$, $2\mathrm{T}\vec{e_1}$, $3\mathrm{T}\vec{e_1}$,..., $-\mathrm{T}\vec{e_1}$, $-2\mathrm{T}\vec{e_1}$,...



**Exemple**

Les fonctions cosinus et sinus sont $2\pi$-périodiques puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x \pm 2\pi \in \mathbb{R}$ et :

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x) \qquad \text{et} \qquad \sin(x+2\pi) = \sin(x).$$

▹ ***Notion de propriété locale***

Par opposition à la notion de propriété globale, une propriété est dite *locale* lorsqu'elle ne concerne la fonction que sur une partie de son intervalle de définition. Nous aurons besoin de définitions plus précises.

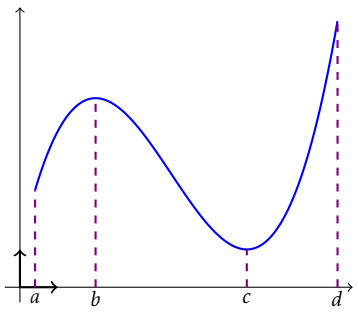
Considérons une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

- Soit $a \in \mathbb{R}$ un élément ou une extrémité de I.
  On dit que $f$ possède une propriété *au voisinage de* $a$ lorsque cette propriété est vraie sur une intersection du type $\mathrm{I} \cap ]a-\delta, a+\delta[$ avec $\delta > 0$.
  Par exemple la fonction cos est positive au voisinage de 0.
- On suppose maintenant que $+\infty$ est l'une des extrémités de I.
  On dit que $f$ possède une propriété *au voisinage de* $+\infty$ lorsque cette propriété est vraie sur un intervalle de la forme $]c, +\infty[$.
  Par exemple la fonction $x \mapsto \frac{\cos(x)}{x}$ est bornée au voisinage de $+\infty$ car elle l'est sur $[1, +\infty[$.
- Si $-\infty$ est l'une des extrémité de I, alors on dit de même que $f$ possède une propriété *au voisinage de* $-\infty$ lorsque cette propriété est vraie sur un intervalle de la forme $]-\infty, c[$.

Un exemple important est celui de la notion d'*extremum local*.
Si $a \in \mathrm{I}$ alors on dit que $f$ admet en $a$ un *maximum local* lorsque, au voisinage de $a$, on a $f(x) \leqslant f(a)$.
De même, on dit que $f$ admet en $a$ un *minimum local* lorsque, au voisinage de $a$, on a $f(x) \geqslant f(a)$.

Par exemple, la fonction représentée ci-contre admet :

- un minimum local en $a$,
- un maximum local en $b$,
- un second minimum local en $c$ (qui s'avère être un minimum global sur I)
- et un second maximum local en $d$ (qui s'avère être un maximum global sur I).



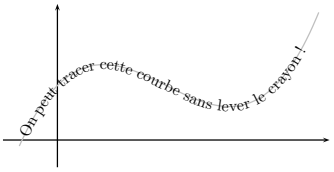

Comme on le verra dans la suite, l'expression « au voisinage de $a$ » est l'analogue de l'expression « à partir d'un certain rang » utilisée pour les suites.

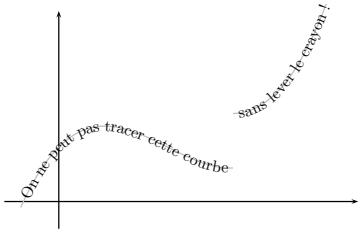
## B.5 - Notions intuitives de limites, continuité et dérivabilité

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I et $x_0$ un élément ou une extrémité de I.
Intuitivement on dit que $f$ a pour limite $\ell$ quand $x$ tend vers $x_0$ si $f(x)$ se rapproche de $\ell$ lorsque $x$ se rapproche de $x_0$. Évidemment, cette phrase est trop imprécise pour être mathématiquement acceptable ; nous reviendrons en détails sur cette notion de limite dans la suite de l'année.
Pour l'instant il est important de bien connaître toutes les limites classiques, notamment celles concernant les fonctions exponentielle et logarithme (voir plus loin dans ce chapitre).
La fonction $f$ est dite *continue* en $x_0 \in$ I si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Si $f$ est continue en tout point de I alors on dit que $f$ est *continue sur* I.
Toujours intuitivement, une fonction définie sur un intervalle est *continue* si sa courbe peut être dessinée « sans lever le crayon » (autrement dit s'il n'y a pas de « saut »).



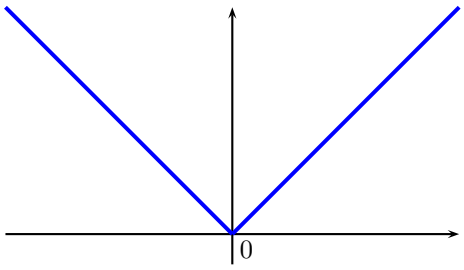

Cette notion sera, elle aussi, formalisée (donc définie rigoureusement) plus tard dans l'année.

**Exemples**

**1 ►** La fonction valeur absolue

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$$

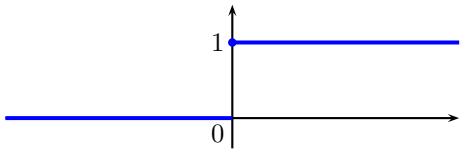
est continue sur $\mathbb{R}$.




**2 ►** La fonction

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{H}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{H}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$$

est continue en tout $x_0 \neq 0$ mais pas en 0.



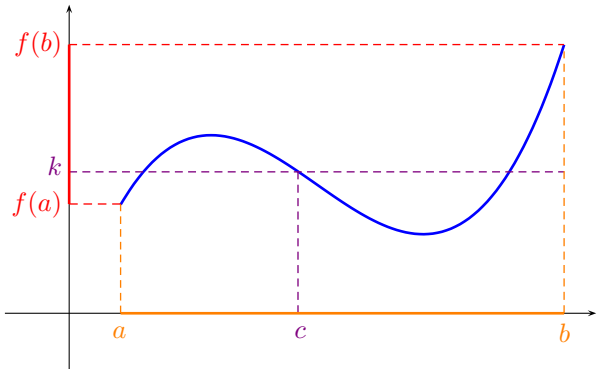

Avant d'énoncer une propriété fondamentale des fonctions continues, donnons un exemple concret. Considérons un randonneur qui part de l'altitude 1100 m et qui veut atteindre un lac situé à l'altitude 1800 m. Alors il y a nécessairement un moment (peut-être plusieurs) où il va passer à l'altitude 1500 m. En fait cela est vrai car la progression de ce randonneur est *continue* : il ne passe pas d'un coup de 1499 à 1501 m.

Dans le cadre des fonctions continues sur un intervalle on a le théorème suivant.

**Théorème II-8 (Théorème des valeurs intermédiaires)**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Si $a$ et $b$ sont deux éléments de I vérifiant $a < b$ alors pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.




Ce théorème permet d'affirmer que si $f$ est continue alors l'*équation* $f(x) = k$ a toujours une solution (au moins) dès que $k$ est entre $f(a)$ et $f(b)$. Bien entendu, il peut y avoir plusieurs solutions. Il y en a par exemple trois sur le dessin précédent.

**Définition II-9**

On dit qu'une fonction $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est ***bijective*** (ou que c'est une ***bijection***) lorsque :

$$\forall y \in \mathrm{F},\ \exists! x \in \mathrm{E} \,/\, f(x) = y.$$

Autrement dit, pour tout $y \in \mathrm{F}$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathrm{E}$ admet une et une seule solution.

**Corollaire II-10**

Si une fonction $f$ est **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors $f$ réalise une **bijection** de I vers $f(\mathrm{I})$, cela signifie que pour tout $y \in f(\mathrm{I})$, il existe un et un seul $x \in \mathrm{I}$ tel que $y = f(x)$.

**Définition II-11**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a$ un élément de I et $f$ une fonction définie sur I.

1. On dit que $f$ est *dérivable* en $a$ lorsque la quantité $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand $h$ tend vers 0.
2. Dans ce cas, cette limite est appelée *la dérivée de $f$ en $a$* et est notée $f'(a)$.
3. On dit que $f$ est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I.
   Dans ce cas la *fonction dérivée* de $f$ est la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}.$$

On a donc lorsque $f$ est dérivable en $a$

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad i.e. \quad f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

**Exemples**

**1 ►** On considère la fonction $f : [0,2] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 1$, alors

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{1}}{x-1} = \frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{1}{2}$$

donc $f$ est dérivable en 1 et on a $f'(1) = \dfrac{1}{2}$.

**2 ►** On considère la fonction $g : [-1,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = |x|$ et $a = 0$, alors

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et il n'y a pas de limite quand $x$ tend vers 0 donc $g$ n'est pas dérivable en 0.

On reviendra plus tard dans l'année sur la dérivation mais dans l'immédiat, il importe :

- de savoir que si $f$ est dérivable en $a$ alors $f$ est continue en $a$ ;
- de connaître les formules de dérivation vues au lycée ;
- de savoir interpréter géométriquement la dérivée en un point : $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente au graphe de $f$ au point d'abscisse $a$ donc l'équation de la tangente est

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

**Exemple**

On considère la fonction $f : [0,2] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$.
On a vu plus haut que $f$ est dérivable en 1 avec $f'(1) = \frac{1}{2}$.
D'autre part, on a $f(1) = 1$ donc la tangente au graphe de $f$ au point de coordonnées $(1, f(1))$ admet pour équation

$$y = \frac{1}{2}(x-1) + 1 \quad i.e. \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

On rappelle également que si

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} \infty$$

alors le graphe de $f$ admet une tangente verticale au point de coordonnées $(a, f(a))$.

**Théorème II-12**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. Si $f' > 0$ sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points en lesquels $f'$ s'annule, alors $f$ est strictement croissante sur I.
2. Si $f' < 0$ sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points en lesquel $f'$ s'annule, alors $f$ est strictement décroissante sur I.
3. Si $f'$ est nulle sur I alors $f$ est constante sur I.

Notons qu'il est important de préciser dans le théorème que $f'$ peut s'annuler en un nombre fini de points. En effet, la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ par exemple admet pour dérivée $x \mapsto 3x^2$ qui est strictement positive sur $\mathbb{R}$ sauf en 0 où elle s'annule et la fonction $f$ est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

▹ **Formulaire**

Si $f$, $g$ et $u$ sont des fonctions alors (sous réserve de définition des fonctions considérées) :

- $(f+g)' = f' + g'$
- $(\lambda f)' = \lambda f'$ ($\lambda$ étant une constante)
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- $(f \circ u)' = (f' \circ u)u'$
- $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$)
- $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$)
- $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$
- $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$

Dans chaque ligne des tableaux, $f'$ est la dérivée de la fonction $f$ sur l'intervalle I.

| $f(x)$ | I | $f'(x)$ |
|---|---|---|
| $\lambda$ (constante) | $\mathbb{R}$ | $0$ |
| $x$ | $\mathbb{R}$ | $1$ |
| $x^n (n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2)$ | $\mathbb{R}$ | $nx^{n-1}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ | $-\frac{1}{x^2}$ |
| $\frac{1}{x^n} (n \in \mathbb{N}^*)$ | $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ | $-\frac{n}{x^{n+1}}$ |
| $\sqrt{x}$ | $]0, +\infty[$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $\ln x$ | $]0, +\infty[$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\mathrm{e}^x$ | $\mathbb{R}$ | $\mathrm{e}^x$ |
| $\sin(x)$ | $\mathbb{R}$ | $\cos(x)$ |
| $\cos(x)$ | $\mathbb{R}$ | $-\sin(x)$ |
| $\tan(x)$ | $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[ (k \in \mathbb{Z})$ | $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ |
| $x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$ | $\mathbb{R}_+^*$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ |

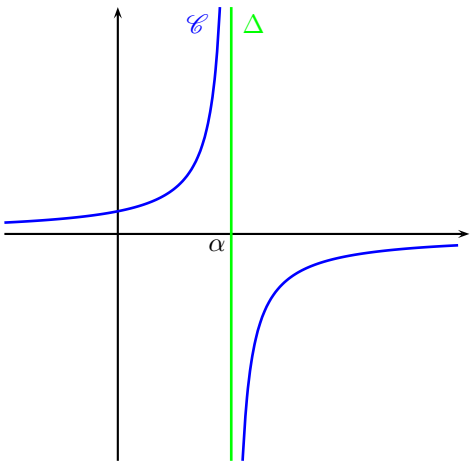
## B.6 - Complément pour l'étude d'une fonction : notion de droite asymptote à un graphe

On suppose que le plan est muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

**Définition II-13**

On considère une fonction $f$ définie sur un ensemble du type $[a,\alpha[\cup]\alpha,b]$.

Si $f(x) \xrightarrow[x\to\alpha]{} \infty$ alors on dit que la droite $\Delta$ d'équation $x=\alpha$ est une *asymptote verticale* au graphe $\mathscr{C}$ de $f$.



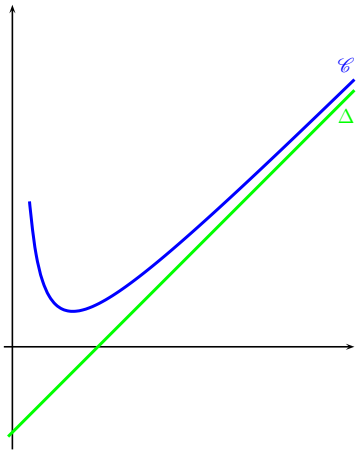

**Exemple**

Le graphe de $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*, x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$ admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.

**Définition II-14**

On considère une fonction $f$ définie sur un intervalle du type $[\alpha,+\infty[$.

Si $f(x)-(ax+b) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ alors on dit que la droite $\Delta$ d'équation $y=ax+b$ est une *asymptote* (oblique) au graphe $\mathscr{C}$ de $f$.




**Exemple**

Soit $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}, x\mapsto 2x+\dfrac{\cos(x)}{x^2}$ alors : $f(x)-2x=\dfrac{\cos(x)}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
Donc la droite d'équation $y=2x$ est asymptote au graphe de $f$ en $+\infty$.

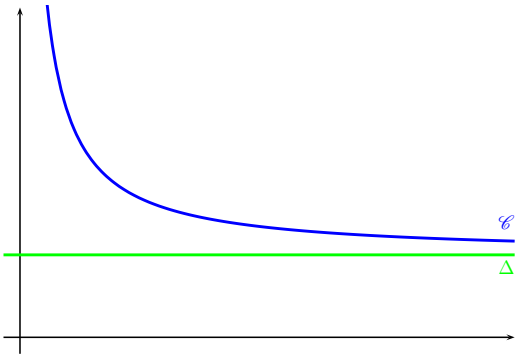
**Remarques**

**1 ►** On définit de façon analogue une asymptote oblique en $-\infty$.

**2 ►** Un cas particulier fréquent est celui où

$$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell.$$

On dit alors que la droite d'équation $y=\ell$ est une *asymptote horizontale* au graphe $\mathscr{C}$ de $f$ en $+\infty$.




**3 ►** Si la droite d'équation $y=ax+b$ est asymptote en $+\infty$ au graphe $\mathscr{C}$ de $f$ alors les nombres réels $a$ et $b$ sont donnés par

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad b=\lim_{x\to+\infty}\Big(f(x)-ax\Big).$$

En effet, si $f(x)-(ax+b)$ tend vers 0 quand $x$ tend vers $+\infty$ alors c'est *a fortiori* le cas de $\frac{f(x)-(ax+b)}{x}$ *i.e.* de $\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}$. Comme le dernier terme tend vers 0, on obtient $a$ puis $b$ qui en découle immédiatement.

Le dernier point de la remarque précédente fournit une méthode pour déterminer si le graphe d'une fonction admet une asymptote oblique.

***Exercice C-44***

**1.** Écrire les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes comme composées des fonctions exp, sin, cos et de fonctions polynomiales que l'on explicitera :

$$f: x\mapsto \sin(x^2+3)\ ,\ g: x\mapsto \mathrm{e}^{\sin^2(x)-3\sin(x)+9}$$

$$\text{et } h: x\mapsto \cos^2\Big(\sin\Big(\mathrm{e}^{2x}-3\mathrm{e}^{x}\Big)\Big).$$

**2.** On considère les deux fonctions T et $f$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{T}(x)=x+1 \quad \text{et} \quad f(x)=\sin\Big(\exp(x+1)+1\Big).$$

Écrire la fonction $f$ comme composée des fonctions T, exp et sin.

***Exercice C-45***

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$x\mapsto\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}},\quad x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x^2+x-2}},$$

$$x\mapsto\ln\Big(x^2+4x+4\Big) \quad \text{et} \quad x\mapsto\sqrt{\ln(x)}.$$

***Exercice C-46***

Soit $n\in\mathbb{Z}^*$. Que peut-on dire de la monotonie de la fonction $x\mapsto x^n$ ?

***Exercice C-47***

Soit $f$ et $g$ deux applications définies sur $\mathbb{R}$.

**1.** Si $f$ est monotone, que peut-on alors en déduire sur la monotonie de $f\circ f$ ?

**2.** Si $f$ et $g$ sont monotones, que peut-on alors en déduire sur la monotonie de $g\circ f$ ? de $fg$ ? de $f+g$ ?

***Exercice C-48***

Étudier la parité des fonctions suivantes :

**1.** $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto\sqrt{x^2+1}$

**2.** $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto x+x^3+2x^5-x^7$

**3.** $f_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto x^2+x+1$

**4.** $f_4:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto|x+1|-|x-1|$

**5.** $f_5:\mathbb{R}\setminus([-2,-1[\cup]1,2])\to\mathbb{R}, x\mapsto\sqrt{\dfrac{1-|x|}{2-|x|}}$

**6.** $f_6:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto\cos(x)\sin(x)$

**7.** $f_7:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto\sin^2(x)$

**8.** $f_8:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto\cos(x)+\sin(x)$

***Exercice C-49***

Soit $f$ et $g$ deux applications définies sur $\mathbb{R}$.
Que peut-on dire de la parité de $g \circ f$ ?

***Exercice C-50***

Étudier la périodicité des fonctions suivantes :

1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x) + \cos(x)$
2. $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x) + \cos(2x)$
3. $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x+1| - |x-1|$
4. $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x) + x$

***Exercice C-51***

Soit $f$ une application, définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période $T > 0$ et $k$ un réel strictement positif.
Que peut-on dire de la périodicité éventuelle des applications :

1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(kx)$
2. $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto kf(x)$
3. $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x+k)$
4. $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) + k$

***Exercice C-52***

La fonction *tangente* est la fonction définie sur :

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$$

par :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Étudier la parité ou l'imparité de tan ainsi que sa périodicité.

***Exercice C-53***

On considère une application $f$ définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2 et donnée sur $[-1,1]$ par :

$$\forall x \in [-1,1],\ f(x) = |x|.$$

1. Tracer la représentation graphique de $f$ sur l'intervalle $[-5,5]$.
2. Donner l'expression de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

***Exercice C-54***

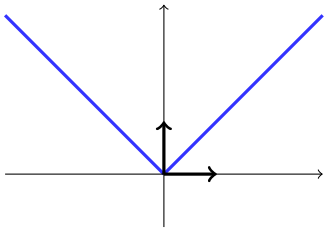
Déterminer si les graphes des fonctions suivantes admettent une asymptote en $+\infty$ :

1. $f : [0,+\infty[ \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{3x^2+1}{x+3}$ ;
2. $g : [0,+\infty[ \to \mathbb{R}, x \mapsto x + \sqrt{x}$ ;
3. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x^2+1}$.

# C - Propriétés des fonctions usuelles de référence

## C.1 - Fonction valeur absolue

La *fonction valeur absolue* est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^*$.
Sur $\mathbb{R}_-^*$ sa dérivée est la fonction constante égale à $-1$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ c'est la fonction constante égale à 1.

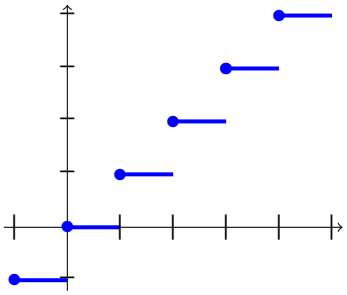


## C.2 - Fonction partie entière

La *fonction partie entière* :

$$\begin{array}{rccc} \lfloor\cdot\rfloor : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$$

est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et elle est continue à droite mais pas à gauche aux entiers.



## C.3 - Fonctions polynomiales et rationnelles

◇ Une fonction $p$ définie sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles est une *fonction polynomiale*, ou un polynôme, lorsqu'il existe un entier $n \geqslant 0$ et des nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait :

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Une fonction polynomiale est dérivable sur $\mathbb{R}$.

◇ On dit qu'une fonction est *rationnelle* lorsqu'elle est le quotient de deux fonctions polynomiales. Par exemple :

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{2x^7 - x^3}{1 + x^2}$$

est une fonctions rationnelle. Notons également qu'une fonction polynomiale est *a fortiori* une fonction rationnelle.
Une fonction rationnelle est définie sur $\mathbb{R}$ sauf aux racines du polynôme qui est au dénominateur et est dérivable sur cet ensemble.

## C.4 - Fonction exponentielle

On rappelle qu'il existe une unique fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, notée $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et appelée *fonction exponentielle*, telle que :

$$\boxed{\exp(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \exp'(x) = \exp(x).}$$

**Remarques**

**1 ►** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\boxed{\exp(x) \neq 0 \text{ et } \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.}$

**2 ►** Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $\boxed{\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).}$

**3 ►** On pose $e = \exp(1)$ et on note $e^x = \exp(x)$.
Pour tout nombre rationnel $r \in \mathbb{Q}$, on a alors $\left(e^x\right)^r = e^{rx}$ ce qui légitime la notation.

**4 ►** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\boxed{\exp(x) > 0}$ donc $\boxed{\exp \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

**5 ►** On a $\exp(0) = 1$ et exp est strictement croissante donc $e^x \geqslant 1$ pour tout $x \geqslant 0$ et $e^x \leqslant 1$ pour tout $x \leqslant 0$.

**6 ►** On a : $\boxed{\dfrac{e^x - 1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1.}$

**7 ►** Pour tout réel $x$, on a $\boxed{e^x \geqslant 1 + x}$ avec égalité si et seulement si $x = 0$.
En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $e^x \geqslant x$.

**8 ►** On en déduit que $e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

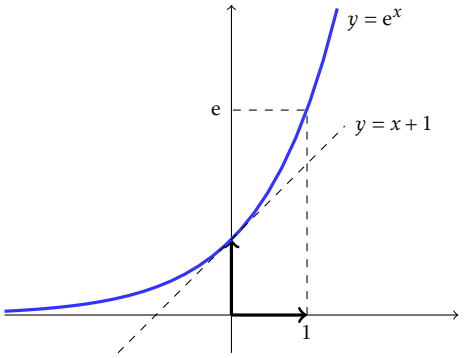
**9 ►** On a : $e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0^+$.

Pour tout réel $x$, on a $\frac{1}{e^x} = e^{-x} \geqslant -x$ donc $\frac{1}{e^x}$ tend vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $-\infty$ *i.e.*

$$e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0^+.$$

Le tableau de variations et le graphe de l'exponentielle sont donc les suivants :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\exp'(x)$ | | $+$ | $1$ | $+$ | |
| $\exp(x)$ | $0$ | ↗ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |




Précisons certaines limites.

**Lemme II-15**

$$\frac{e^x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

***Démonstration***

Géométriquement, on dit que le graphe de l'exponentielle admet une *branche parabolique* de direction asymptotique $(Oy)$.

**Proposition II-16**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{e^x}{x^n} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad x^n e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0.$$

***Démonstration***

## C.5 - Fonction logarithme népérien

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers son image $\mathbb{R}_+^*$. Sa fonction réciproque est la fonction *logarithme népérien* :

$$\ln : ]0,+\infty[ \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x).$$

**Remarques**

**1** ► Comme exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\boxed{\ln \text{ est strictement croissante sur } ]0,+\infty[.}$

**2** ► Comme exp est continue sur $\mathbb{R}$, ln est continue sur $]0,+\infty[$.

**3** ► La fonction ln est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$\forall x>0,\ \ln'(x)=\frac{1}{x}.$$

La démonstration de ce point repose sur un résultat qui ne sera démontré que plus tard dans l'année.

**4** ► D'après les limites de exp, on a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$.

**5** ► Pour tout $(x,y)\in]0,+\infty[^2$, on a : $\boxed{\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y).}$

**6** ► Pour tout $x\in]0,+\infty[$, on a : $\boxed{\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln(x).}$

**7** ► Pour tout nombre rationnel $r\in\mathbb{Q}$ et tout $x\in]0,+\infty[$, on a : $\boxed{\ln(x^r)=r\ln(x).}$

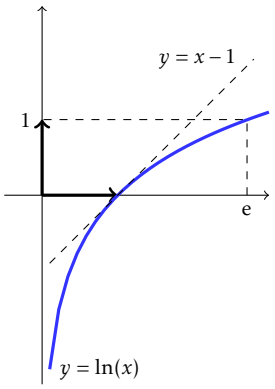
**8** ► Comme $\ln(1)=0$ et $\ln'(1)=1$, on a :

$$\boxed{\frac{\ln(x)}{x-1}\xrightarrow[x\to1]{}1 \qquad i.e. \qquad \frac{\ln(1+t)}{t}\xrightarrow[t\to0]{}1.}$$

**9** ► Pour tout réel $x>0$, on a $\boxed{\ln(x)\leqslant x-1}$ ; de plus, il n'y a égalité que pour $x=1$.

Le tableau de variations et le graphe du logarithme népérien sont donc les suivants :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln' x$ | ‖ | $+$ | $1$ | $+$ | |
| $\ln x$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |




**Proposition II-17**

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{\ln(x)}{x^n}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0^+ \qquad \text{et} \qquad x^n\ln(x)\xrightarrow[x\to0^+]{}0^+.$$

***Démonstration***

## C.6 - Fonctions puissances

Soit $\alpha$ un réel, on appelle *fonction puissance* d'exposant $\alpha$ l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_\alpha : & ]0,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)} \end{array} .$$

Si $\alpha \in \mathbb{N}$ alors on retrouve les fonctions puissances déjà connues.

**Proposition II-18**

Pour tout réel $\alpha$, la fonction $\varphi_\alpha$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$\varphi'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

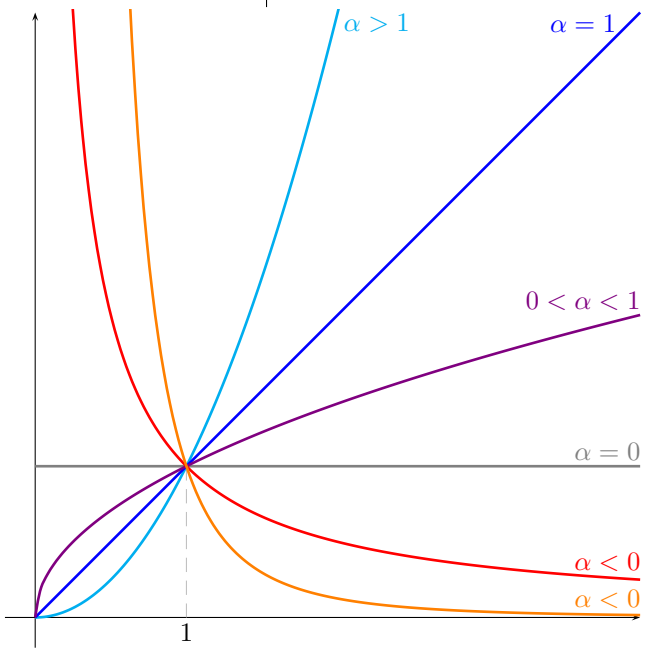
Cette formule généralise la formule connue pour des exposants entiers.

Cas où $\alpha > 0$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi'_\alpha(x)$ | ‖ | $+$ | $\alpha$ | $+$ | |
| $\varphi_\alpha(x)$ | ‖ $0$ | ↗ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |

Cas où $\alpha < 0$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi'_\alpha(x)$ | ‖ | $-$ | $\alpha$ | $-$ | |
| $\varphi_\alpha(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $1$ | ↘ | $0$ |



## C.7 - Fonctions circulaires

Les fonctions *cosinus* et *sinus* sont définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[-1,1]$, $2\pi$-périodiques et dérivables sur $\mathbb{R}$ avec pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\cos'(x) = -\sin(x) \qquad \text{et} \qquad \sin'(x) = \cos(x).$$

La variable $x$ désigne une mesure d'angle exprimée en radians.

La fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire.

La *fonction tangente* est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ par :

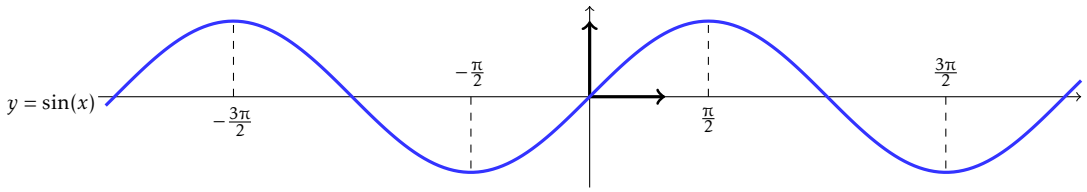
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Il s'agit d'une fonction impaire, $\pi$-périodique, dérivable sur son ensemble de définition et qui vérifie pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ :

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

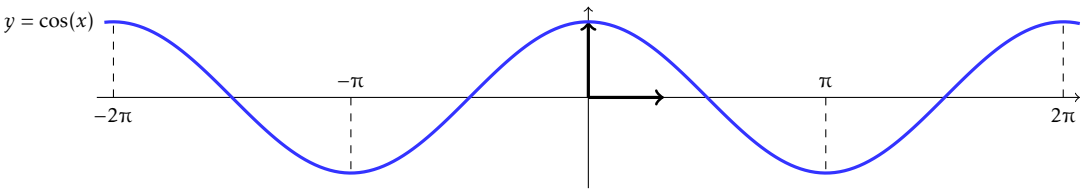
◇ La fonction sinus est $2\pi$-périodique et impaire, il suffit donc de connaître ses variations sur l'intervalle $[0,\pi]$ pour en déduire ses variations sur $\mathbb{R}$.

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin'(x)$ | $1$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-1$ |
| $\sin(x)$ | $0$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ |



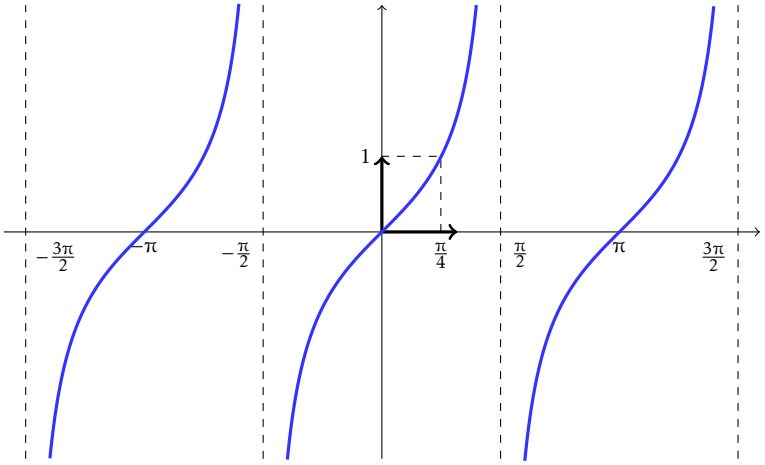

◇ La fonction cosinus est $2\pi$-périodique et paire, il suffit donc de connaître ses variations sur l'intervalle $[0,\pi]$ pour en déduire ses variations sur $\mathbb{R}$.

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos'(x)$ | $0$ | $-$ | $-1$ | $-$ | $0$ |
| $\cos(x)$ | $1$ | ↘ | $0$ | ↘ | $-1$ |



◇ La fonction tangente est $\pi$-périodique et impaire, il suffit donc de connaître ses variations sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ pour en déduire ses variations sur son ensemble de définition.
Pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0$ donc la fonction tangente est strictement croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $\tan'(x)$ | $1$ | $+$ | ‖ |
| $\tan(x)$ | $0$ | ↗ | $+\infty$ ‖ |




Il faut prendre garde au fait que la fonction tangente n'est pas globalement croissante puisqu'elle est périodique.

***Exercice C-55***

À l'aide des représentations graphiques des fonctions usuelles, représenter graphiquement les fonctions suivantes après avoir spécifié leur ensemble de définition :

1. $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^x + 1$ ;
2. $f_2 : x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x}\right)$;
3. $f_3 : x \mapsto (x+1)^3$ ;
4. $f_4 : x \mapsto \sin(2x)$.

***Exercice C-56***

Calculer les dérivées des fonctions $f$ définies par les expressions suivantes (on ne cherchera pas l'ensemble de définition ni celui de dérivabilité) :

1. $f(x) = \dfrac{x^3}{3}$ ;
2. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{4}$ ;
3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ;
4. $f(x) = \dfrac{1}{2x}$ ;
5. $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ ;
6. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ;
7. $f(x) = x^4\cos(x)$ ;
8. $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^2+1}$ ;
9. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ ;
10. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ;
11. $f(x) = \dfrac{5}{\ln(x)}$ ;
12. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ ;
13. $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^{-4x}$ ;
14. $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(3x)$ ;
15. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} + x}{\sin(x)}$.

***Exercice C-57***

Calculer le plus vite possible les dérivées des fonctions $f$ définies par les expressions suivantes **sans** utiliser de formule de composition :

1. $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}}$ ;
2. $f(x) = \ln(2x)$ ;
3. $f(x) = \sqrt{2x}$.

***Exercice C-58***

Calculer les dérivées des fonctions $f$ définies par les expressions suivantes (on ne cherchera pas l'ensemble de définition ni celui de dérivabilité) :

1. $f(x) = \ln(x^2+1)$ ;
2. $f(x) = \mathrm{e}^{3x^2-4x+1}$ ;
3. $f(x) = \Big(\sin(x)\Big)^4$ ;
4. $f(x) = \sqrt{x^4+x^2+1}$ ;
5. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{1/x} + x^2}{(x^2+x+1)^3}$.

***Exercice C-59***

Donner les tableaux de variations des fonctions $f$ données ci-dessous sur la partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$ indiquée.

1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$ $\quad \mathscr{D} = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ $\quad \mathscr{D} = \mathbb{R}$
3. $f(x) = 1 + x\mathrm{e}^{-x}$ $\quad \mathscr{D} = \mathbb{R}$
4. $f(x) = x^2\ln(x)$ $\quad \mathscr{D} = ]0, +\infty[$
5. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$ $\quad \mathscr{D} = ]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$
6. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x - x^2}}$ $\quad \mathscr{D} = ]0, 4[$
7. $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + x - 1$ $\quad \mathscr{D} = \mathbb{R}$
8. $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ $\quad \mathscr{D} = ]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
9. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ $\quad \mathscr{D} = ]0, +\infty[$
10. $f(x) = \ln(x^2+1) - \dfrac{1}{2}x^2$ $\quad \mathscr{D} = \mathbb{R}$
11. $f(x) = \sqrt{x^4 + x^2}$ $\quad \mathscr{D} = \mathbb{R}$
12. $f(x) = \cos(x)\Big(1 - \cos(x)\Big)$ $\quad \mathscr{D} = \mathbb{R}$
13. $f(x) = \ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$ $\quad \mathscr{D} = ]0, \pi[$