

Objectifs et savoir-faire► *Langage mathématique*

- Décrire un ensemble de nombres avec rigueur.
- Maîtriser le vocabulaire «condition nécessaire», «condition suffisante», «il faut», «il suffit», etc.
- Maîtriser la syntaxe d'utilisation des quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

► *Raisonnement par récurrence*

- Rédiger un raisonnement par récurrence.
- Comprendre l'utilité des différentes versions du raisonnement par récurrence.

► *Nombres réels*

- Exploiter une représentation graphique des nombres réels (notamment avec des valeurs absolues) pour guider un raisonnement.
- Calculer avec des nombres réels, manipuler des inégalités et des encadrements.
- Connaître et maîtriser la notion de partie entière d'un réel.

► *Sommes et produits*

- Connaître et manipuler les symboles $\sum$ et $\prod$.
- Connaître la notion de factorielle $n!$ d'un entier naturel n .
- Calculer des sommes (simples, doubles).
- Calculer avec des coefficients binomiaux.
- Utiliser la formule du binôme de Newton.

► *Révisions sur les équations polynomiales de degré 2*► **Note aux colleurs :**

- les raisonnements par récurrence devront *a priori* reposer sur une hypothèse simple (le cas d'une hypothèse double ou forte devra être guidé);
- les sommes à connaître sont $\sum_{k=0}^n x^k$ (pour $x \neq 1$), $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$, $\sum_{k=1}^n k^3$ ainsi que la formule du binôme.

► **Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :**

1. Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels $2^n \geq n^3$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que : $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

3. Soit n un entier avec $n \geq 1$, calculer $S = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \min(i, j)$.

4. Soit n un entier avec $n \geq 2$, calculer $P = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Justifier le fait que : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

b. Simplifier l'expression $k \binom{n}{k}$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

c. Calculer la somme $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer que $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$:

► à l'aide d'un raisonnement par récurrence ;

► à l'aide d'un télescopage.

7. *Inégalité de Cauchy-Schwarz*

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tous réels $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, avec au moins l'un des x_k non nuls, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right),$$

Préciser dans quel cas il y a égalité.