TD 5 – Représentation graphique d'une fonction

Exercice 5-1

1. Tracer sur un même dessin les représentations graphiques des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ suivantes :

$$x \mapsto x^2, \quad x \mapsto x^3 \quad \text{et} \quad x \mapsto x^4.$$

2. Tracer sur un même dessin les représentations graphiques des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ suivantes :

$$x \mapsto x^2 \quad \text{et} \quad x \mapsto \sqrt{x}.$$

3. Tracer sur un même dessin les représentations graphiques des fonctions :

$$\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}, \quad \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^2}$$

$$\text{et} \quad \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Exercice 5-2

1. Représenter graphiquement les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ suivantes :

$$x \mapsto \mathrm{e}^{2x}, \quad x \mapsto \mathrm{e}^{-x}, \quad x \mapsto \mathrm{e}^{x+1},$$

$$x \mapsto \mathrm{e}^{1-x} \quad \text{et} \quad x \mapsto 2\mathrm{e}^{x+2}.$$

2. Représenter graphiquement les fonctions suivantes :

$$\mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x+1}, \quad \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{-x+1},$$

$$\mathbb{R}\backslash\{2\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{2}{x-2}, \quad \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x+1}+1$$

$$\text{et} \quad \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2x+1}.$$

Exercice 5-3

1. Représenter graphiquement les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-2x}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$$

$$\text{et} \qquad g(x) = 1 - \mathrm{e}^{-2x}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x).$$

2. Représenter graphiquement la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\right)\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\mathbb{1}_{]-\infty,0[}(x).$$

3. Représenter graphiquement les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\mathbb{1}_{[0,1]}(x) + \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(x)$$

$$\text{et} \qquad g(x) = f(x) + 1 - f(-x).$$

Exercice 5-4 (nouvelle version de C-7)

1. On Considérons une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$). Écrire la définition avec des quantificateurs de « f est bornée ».

2. Montrer que si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions bornées, et si λ est un réel, alors les fonctions $f + g$ et λf sont bornées.

3. Dans toute la suite, on note pour toute fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ bornée :

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| \ ; \ x \in \mathrm{I}\},$$

que l'on lit «norme de f».

a. Montrer que si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée alors $\|f\| = 0$ si et seulement si f est la fonction nulle sur I.

b. Montrer que si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions bornées alors :

$$\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|.$$

c. Montrer que si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée et si λ est un réel alors :

$$\|\lambda f\| = |\lambda|\|f\|.$$