CHAPITRE

III

INTRODUCTION À L'ALGÈBRE LINÉAIRE

Sommaire

A Calcul matriciel 2
A.1 Matrices rectangulaires et opérations algébriques 2
A.2 Matrices carrées 7
A.3 Matrices carrées inversibles 9
A.4 Matrices et systèmes linéaires 12
A.5 Calcul de l'inverse d'une matrice 14
B Espaces vectoriels **16**
B.1 Définition des espaces vectoriels 16
B.2 Définition des sous-espaces vectoriels et exemples fondamentaux 18
B.3 Intersection de sous-espaces vectoriels 22
B.4 Notion de famille génératrice d'un sous-espace vectoriel 24

A - Calcul matriciel

A.1 - Matrices rectangulaires et opérations algébriques

Définition III-1

Une ***matrice*** à n lignes et p colonnes est la donnée de np nombres réels répartis dans un tableau à n lignes et p colonnes.
L'ensemble de ces matrices est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes.

Remarques

1 ► Nous notons $\left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ pour désigner la matrice dont le terme à la i-ème ligne et j-ème colonne est $a_{i,j}$.
Pour désigner le coefficient à la i-ème ligne et j-ème colonne, on emploie l'expression « coefficient à la place (i,j) ».
Il faut bien noter que le premier indice indique la ligne et le second indique la colonne.

Si $\mathrm{A}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $i\in[\![1,n]\!]$ et $j\in[\![1,p]\!]$ alors, dans les calculs, on note souvent $\mathrm{A}[i,j]$ le coefficient à la place (i,j).

2 ► Une matrice à une ligne est appelée une ***matrice ligne***.
Une matrice à une colonne est appelée une ***matrice colonne***.

3 ► Notons que l'on dit que deux matrices A et B sont ***égales*** lorsqu'elles sont de même taille et que les coefficients à la même place sont identiques.

On définit maintenant des opérations algébriques sur l'ensemble des matrices.

Définition III-2

On considère deux matrices de même taille $\mathrm{A}=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $\mathrm{B}=(b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ ainsi qu'un réel λ.

1. La ***matrice somme*** de A et B est la matrice, notée $\mathrm{A}+\mathrm{B}$, définie par :

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}=(a_{i,j}+b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}.$$

2. La ***matrice produit*** de A ***par le réel*** λ est la matrice, notée $\lambda\mathrm{A}$, définie par :

$$\lambda\mathrm{A}=(\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}.$$

Additionner deux matrices revient donc à additionner les coefficients de même emplacement dans ces deux matrices. Multiplier une matrice par un réel revient donc à multiplier chacun des coefficients de la matrice par ce nombre.

Exemple

Pour des matrices à deux lignes et deux colonnes, cela donne :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+\alpha & b+\beta \\ c+\gamma & d+\delta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}.$$

Définition III-3

On considère une matrice ligne $\mathrm{L} = \begin{pmatrix} \ell_1 & \cdots & \ell_p \end{pmatrix}$ et une matrice colonne $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}$ avec le même nombre de coefficients.

Le ***produit*** de L par C est le scalaire suivant :

$$\mathrm{L} \cdot \mathrm{C} = \ell_1 c_1 + \ell_2 c_2 + \cdots + \ell_p c_p.$$

Exemple

Si $\mathrm{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors : L.C =

De façon plus générale, définissons maintenant le produit de deux matrices.

Définition III-4

Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant m}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$.

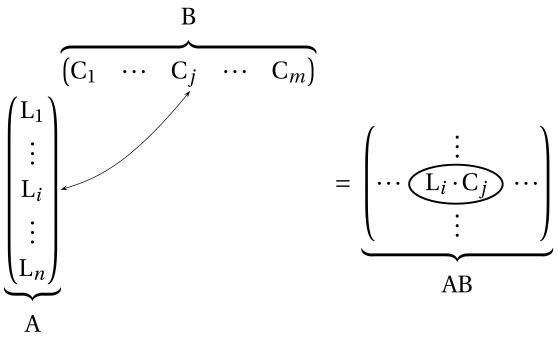
La ***matrice produit*** de A par B est la matrice, notée AB, de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ dont le coefficient à la place (i, j) est le produit de la ligne i de A par la colonne j de B *i.e.* il s'agit de :

$$\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.$$

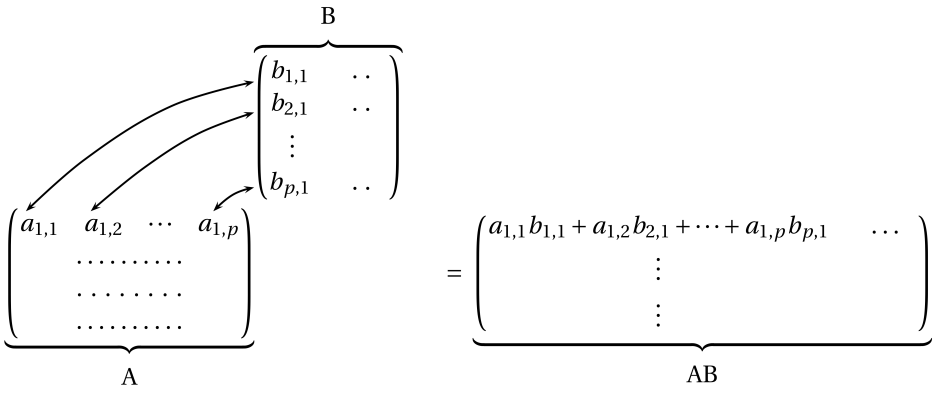
Il faut prendre le temps de bien comprendre la formule de cette définition.

Pour calculer le coefficient à la place (i, j) de la matrice AB, on s'intéresse aux coefficients de la i-ème ligne de A et à ceux de la j-ème colonne de B.

Visuellement, cela se traduit par :



Par exemple, dans le cas du terme en haut à gauche du produit :



Notons que **le nombre de colonnes de** A **est le même que le nombre de lignes de** B.

Exemples

1 ► $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} =$

2 ► $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} =$

3 ► La matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls est appelée ***matrice nulle*** et est notée $0_{n,p}$ par la suite.
Si $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ alors :

$$A0_{m,p} = 0_{n,p} \text{ et } 0_{p,n}A = 0_{p,m}.$$

Autrement dit, multiplier une matrice par une matrice nulle (de taille convenable) donne donc une matrice nulle.

Remarques

1 ► Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, on note :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

alors

$$AX = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p \\ \cdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p \end{pmatrix}.$$

2 ► Considérons deux matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$ alors le coefficient à la place (i,j) de AB est :

$$(AB)[i,j] = \sum_{k=1}^{p} A[i,k]\, B[k,j]$$

donc la j-ème colonne de AB est :

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} A[1,k]\, B[k,j] \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} A[n,k]\, B[k,j] \end{pmatrix} \textit{ i.e. } \begin{pmatrix} A[1,1] & \cdots & A[1,p] \\ \vdots & & \vdots \\ A[n,1] & \cdots & A[n,p] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B[1,j] \\ \vdots \\ B[p,j] \end{pmatrix}$$

ce qui signifie que la j-ème colonne de AB est le produit de A par la j-ème colonne de B.
De même, la i-ème ligne de AB est :

$$\left(\sum_{k=1}^{p} \mathrm{A}[i,k]\mathrm{B}[k,1] \quad \cdots \quad \sum_{k=1}^{p} \mathrm{A}[i,k]\mathrm{B}[k,m]\right)$$

i.e.

$$\begin{pmatrix}\mathrm{A}[i,1] & \cdots & \mathrm{A}[i,p]\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{B}[1,1] & \cdots & \mathrm{B}[1,m] \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{B}[p,1] & \cdots & \mathrm{B}[p,m]\end{pmatrix}$$

ce qui signifie que la i-ème ligne de AB est le produit de la i-ème ligne de A par B.

Proposition III-5 (Propriétés des opérations)

1. Si $(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}) \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})^3$ alors : $(\mathrm{A}+\mathrm{B})+\mathrm{C} = \mathrm{A}+(\mathrm{B}+\mathrm{C})$.
2. Si $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})^2$ alors : $\mathrm{A}+\mathrm{B} = \mathrm{B}+\mathrm{A}$
3. Si $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors : $(\lambda\mathrm{A}+\lambda\mathrm{B}) = \lambda(\mathrm{A}+\mathrm{B})$.
4. Si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$, $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{s,t}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_{t,u}(\mathbb{R})$ alors : $\mathrm{A}(\mathrm{BC}) = (\mathrm{AB})\mathrm{C}$.
5. Si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$, $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{s,t}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors : $(\lambda\mathrm{A})\mathrm{B} = \mathrm{A}(\lambda\mathrm{B}) = \lambda(\mathrm{AB})$.
6. Si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$ et $(\mathrm{B},\mathrm{C}) \in \mathcal{M}_{s,t}(\mathbb{R})^2$ alors : $\mathrm{A}(\mathrm{B}+\mathrm{C}) = \mathrm{AB}+\mathrm{AC}$.
7. Si $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_{s,t}(\mathbb{R})$ alors : $(\mathrm{A}+\mathrm{B})\mathrm{C} = \mathrm{AC}+\mathrm{BC}$.

Démonstration

Les trois premiers points sont évidents compte tenu de la définition et des propriétés des opérations dans $\mathbb{R}$.
Prouvons la quatrième relation en calculant le coefficient à la place (i,j) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}(\mathrm{BC})[i,j] &= \sum_{k=1}^{s} \mathrm{A}[i,k](\mathrm{BC})[k,j] \\
&= \sum_{k=1}^{s} \mathrm{A}[i,k]\left(\sum_{\ell=1}^{t} \mathrm{B}[k,\ell]\mathrm{C}[\ell,j]\right) \\
&= \sum_{k=1}^{s}\sum_{\ell=1}^{t} \mathrm{A}[i,k]\mathrm{B}[k,\ell]\mathrm{C}[\ell,j] \\
&= \sum_{\ell=1}^{t}\left(\sum_{k=1}^{s} \mathrm{A}[i,k]\mathrm{B}[k,\ell]\right)\mathrm{C}[\ell,j] \\
&= \sum_{\ell=1}^{t} (\mathrm{AB})[i,\ell]\mathrm{C}[\ell,j] \\
&= (\mathrm{AB})\mathrm{C}[i,j].
\end{aligned}$$

Le cinquième point est facile.

Pour prouver le sixième, on procède comme ci-dessus en calculant le coefficient à la place (i,j) de $A(B+C)$:

$$\begin{aligned}A(B+C)[i,j] &= \sum_{k=1}^{s} A[i,k](B+C)[k,j] \\ &= \sum_{k=1}^{s} A[i,k]\Big(B[k,j]+C[k,j]\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{s} A[i,k]B[k,j] + \sum_{k=1}^{s} A[i,k]C[k,j] \\ &= (AB)[i,j] + (AC)[i,j] \\ &= (AB+AC)[i,j].\end{aligned}$$

La preuve du dernier point est analogue.

Remarque

Observons en revanche l'exemple suivant :

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

On constate donc que, même lorsque le produit est défini «dans les deux sens» (AB et BA), il n'y a aucune raison que les matrices produits soit identiques.
D'autre part, le produit de deux matrices non nulles peut être nul.

Exercice C-60

1. On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -2 & 0\end{pmatrix} \text{ et } I_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

a. Calculer $A+B$, $A-3B$, $(B-I_2)(A+I_2)$ et A^3B.

b. Indiquer quels sont les produits entre deux de ces matrices qui ont un sens et donner la matrice produit le cas échéant.

2. On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 2\end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}\ C = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}.$$

Indiquer quels sont les produits entre deux de ces matrices qui ont un sens et donner la matrice produit le cas échéant.

Définition III-6

On appelle ***matrice transposée*** d'une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la matrice notée ${}^tA$ de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les lignes de A.

Plus précisément, le coefficient à la place (i,j) de ${}^tA$ est celui à la place (j,i) de A.
On rencontre également la notation A^T (mais ce n'est pas celle indiquée dans le programme officiel de la classe ECG1).

Exemples

1 ► Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

2 ► La transposée d'une matrice ligne est une matrice colonne et *vice-versa*.

3 ► Pour toute matrice A, on a ${}^t({}^tA) = A$.

Exercice C-61

1. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que : ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ et ${}^t(\lambda A) = \lambda({}^tA)$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$. Montrer que : ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

A.2 - Matrices carrées

Définition III-7

Une matrice comportant le même nombre de lignes que de colonnes est appelée une ***matrice carrée***.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes.

On dit aussi que les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont les matrices carrées d'ordre n.

Remarques (vocabulaire spécifique aux matrices carrées)

1 ► On appelle ***matrice unité*** (ou *matrice identité*) d'ordre n, et on note I_n, la matrice dont le terme à la place (i,j) est 1 si $i = j$ et 0 sinon, *i.e.*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 ► On considère une matrice carrée A.

i. Les ***termes diagonaux*** de A sont les nombres $A[1,1], \cdots, A[n,n]$.

ii. On dit que A est une ***matrice diagonale*** lorsque $A[i,j] = 0$ dès que $i \neq j$.

iii. On dit que A est une ***matrice triangulaire supérieure*** lorsque $A[i,j] = 0$ dès que $i > j$.

iv. On dit que A est une ***matrice triangulaire inférieure*** lorsque $A[i,j] = 0$ dès que $i < j$.

v. On dit que A est une ***matrice symétrique*** si $A = {}^tA$.

Exemples

1 ► La matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure, ses termes diagonaux sont a, d et f et elle est diagonale lorsque $b = c = e = 0$.

2 ► La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est symétrique et la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

3 ► La transposée d'une matrice (carrée) diagonale est égale à elle même.
La transposée d'une matrice (carrée) triangulaire supérieure est triangulaire inférieure et *vice-versa*.

Remarques (propriétés des opérations)

1 ► Un des avantages des matrices carrées est que si A et B sont deux matrices carrées de même taille alors les deux produits AB et BA ont un sens puisque les nombres de lignes de l'une et de colonnes de l'autre sont les mêmes.

De plus si A, B et C sont des matrices carrées de même taille alors :

$$\mathrm{A}(\mathrm{BC}) = (\mathrm{AB})\mathrm{C} \ , \ \mathrm{A}(\mathrm{B}+\mathrm{C}) = \mathrm{AB}+\mathrm{AC} \ \text{ et } \ (\mathrm{A}+\mathrm{B})\mathrm{C} = \mathrm{AC}+\mathrm{BC}.$$

2 ► Un produit de matrices diagonales est une matrice diagonale. Plus précisément :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}.$$

3 ► Un produit de matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.

En effet, soit A et B deux matrices triangulaires supérieures, alors :

$$(\mathrm{AB})[i,j] = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}[i,k]\mathrm{B}[k,j].$$

– Si $i = j$ alors :

$$\begin{aligned}(\mathrm{AB})[i,i] &= \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{\mathrm{A}[i,k]}_{=0 \text{ car } i>k} \mathrm{B}[k,i] + \mathrm{A}[i,i]\mathrm{B}[i,i] + \sum_{k=i+1}^{n} \mathrm{A}[i,k] \underbrace{\mathrm{B}[k,i]}_{=0 \text{ car } k>i} \\ &= \mathrm{A}[i,i]\mathrm{B}[i,i].\end{aligned}$$

– Si $i > j$ alors :

$$\begin{aligned}(\mathrm{AB})[i,j] &= \sum_{k=1}^{j} \underbrace{\mathrm{A}[i,k]}_{=0 \text{ car } i>k} \mathrm{B}[k,j] + \sum_{k=j+1}^{n} \mathrm{A}[i,k] \underbrace{\mathrm{B}[k,j]}_{=0 \text{ car } k>j} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ce que l'on peut donc résumer en :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}.$$

De même, un produit de matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ \star & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ \star & & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ \star & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}.$$

4 ► Pour tout matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{A}.\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n.\mathrm{A} = \mathrm{A}.$$

On dit que I_n est un *élément neutre* pour la multiplication des matrices.

En effet, on peut écrire pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$\begin{aligned}(\mathrm{A}\ \mathrm{I}_n)[i,j] &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}[i,k]\mathrm{I}_n[k,j] \\ &= \mathrm{A}[i,j]\underbrace{\mathrm{I}_n[j,j]}_{=1} + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \mathrm{A}[i,k]\ \underbrace{\mathrm{I}_n[k,j]}_{=0 \text{ car } k\neq j} \\ &= \mathrm{A}[i,j].\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}(\mathrm{I}_n\ \mathrm{A})[i,j] &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{I}_n[i,k]\mathrm{A}[k,j] \\ &= \underbrace{\mathrm{I}_n[i,i]}_{=1}\mathrm{A}[i,j] + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \underbrace{\mathrm{I}_n[k,i]}_{=0 \text{ car } k\neq i}\ \mathrm{A}[k,j] \\ &= \mathrm{A}[i,j].\end{aligned}$$

5 ► La propriété d'*associativité* énoncée ci-dessus (le fait que la place des parenthèses ne compte pas) a pour conséquence la possibilité de définir les puissances d'une matrice carrée. En effet, si A est une matrice carrée, alors les matrices (A.A).A et A.(A.A) sont les mêmes et il est naturel de noter A^3 cette matrice. De façon générale, on note :

$$\mathrm{A}^0 = \mathrm{I}_n \quad \text{et :} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{A}^{n+1} = \mathrm{A}^n.\mathrm{A}.$$

On peut ensuite définir un polynôme de matrice. Considérons $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[x]$ que l'on note $\mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$ alors on définit la matrice P(A) par :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \sum_{k=0}^{d} a_k \mathrm{A}^k = a_0\,\mathrm{I}_n + a_1\mathrm{A} + \cdots + a_d\mathrm{A}^d.$$

6 ► On a vu que le produit matriciel, même pour les matrices carrées, ne respectait pas les mêmes règles de calcul que les nombres réels ; il n'y a notamment pas *commutativité* (on n'a pas nécessairement AB = BA).

Exercice C-62

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $\mathrm{E}_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à la place (i,j) qui est égal à 1.

1. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$, calculer le produit $\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{k,\ell}$.

2. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, calculer les produits $\mathrm{A}\,\mathrm{E}_{i,j}$ et $\mathrm{E}_{i,j}\,\mathrm{A}$.

3. Déterminer l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\forall \mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{AB} = \mathrm{BA}$.

A.3 - Matrices carrées inversibles

Considérons une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et supposons qu'il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que l'on ait $\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$. La matrice B est alors unique. En effet, supposons que l'on puisse également écrire $\mathrm{AC} = \mathrm{CA} = \mathrm{I}_n$ avec C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors :

$$\mathrm{B}(\mathrm{AC}) = (\mathrm{BA})\mathrm{C} \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{B}.\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n.\mathrm{C} \qquad \textit{i.e.} \qquad \mathrm{B} = \mathrm{C}.$$

Cela autorise la définition suivante :

Définition III-8

On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est ***inversible*** lorsqu'il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que l'on ait $AB = BA = I_n$.
Cette matrice B est appelée ***l'inverse de*** A et est notée A^{-1}.

Inverse à gauche ou à droite

On admet que s'il existe une matrice B telle que $AB = I_n$ alors A est inversible et $A^{-1} = B$ et que s'il existe une matrice B telle que $BA = I_n$ alors A est inversible et $A^{-1} = B$.

Exemples

1 ► Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Alors $AB = BA = I_3$ donc A et B sont inversibles et sont inverses l'une de l'autre.

2 ► Cherchons un inverse éventuel de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3 ► Il arrive que l'on puisse facilement trouver l'inverse d'une matrice à l'aide d'une relation polynomiale.
Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, alors :

Remarques

1 ► Si A et B sont deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors le produit AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2 ► La matrice nulle 0_n n'est pas inversible puisque, pour toute matrice B, on a : $B0_n = 0_nB = 0_n$ (donc ce n'est pas I_n).

3 ► Si A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors ${}^tA$ est également inversible et on a : $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

4 ► L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $GL_n(\mathbb{R})$ et est appelé le *groupe linéaire* d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$.

5 ► Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et B et C deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a alors les relations :

$$AB = 0_{n,p} \iff B = 0_{n,p} \quad \text{et} \quad AB = AC \iff B = C.$$

Le sens non trivial de la première équivalence est donnée par la relation $B = A^{-1}AB$. La seconde équivalence se déduit de la première en écrivant :

$$\begin{aligned} AB = AC &\iff A(B-C) = 0 \\ &\iff B - C = 0 \\ &\iff B = C. \end{aligned}$$

En particulier, s'il existe une matrice non nulle B telle que AB soit nulle alors A n'est pas inversible. Notons que l'on peut énoncer les mêmes résultats avec des produits à gauche.

Exercice C-63

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Exprimer A^3 comme combinaison linéaire de A^2, A et I_3 puis en déduire A^{-1}.

Notons le cas particulier des matrices 2×2.

Proposition III-9

Une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$; dans ce cas, on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

A.4 - Matrices et systèmes linéaires

Il est clair que lorsque l'on cherche à résoudre un système, le nom donné aux inconnues n'importe pas, seuls comptent les valeurs et les emplacements des coefficients (quel scalaire est devant la j-ème inconnue dans la i-ème équation ?). On se focalise donc sur cette famille de coefficients que l'on dispose dans une matrice.

Définition III-10

Considérons un système linéaire de n équations à p inconnues :

$$(\mathrm{S}) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

La ***matrice du système linéaire*** (S) est la matrice à n lignes et p colonnes :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

La ***matrice augmentée du système linéaire*** (S) est la matrice à n lignes et $p+1$ colonnes :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} & b_n \end{array}\right).$$

Remarques

1 ► Si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne la matrice de (S) et si on note $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne des seconds membres alors la matrice augmentée du système est souvent notée (A|B).

La barre verticale n'est qu'un outil visuel pour séparer les coefficients relatifs aux inconnues de ceux des seconds membres, elle peut donc être omise.

2 ► On peut définir sur une matrice les mêmes opérations élémentaires sur les lignes que sur les lignes d'un système.

Deux matrices A et A′ sont dites *équivalentes par lignes* lorsqu'elle se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes ; on note alors $\mathrm{A} \underset{\mathrm{L}}{\sim} \mathrm{A}'$.

Si l'on passe d'un système linéaire (S) à un système linéaire (S′) par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes alors la matrice augmentée de (S′) s'obtient en effectuant la même suite d'opérations élémentaires sur la matrice augmentée de (S) et réciproquement.

La réciproque évoquée ci-dessus induit que si deux matrices augmentées sont équivalentes par lignes alors les systèmes associés sont équivalents donc ont les mêmes solutions.

3 ► Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, alors :

$$AX = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p \\ \cdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p \end{pmatrix}$$

donc :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases} \iff AX = B.$$

Résoudre le système linéaire ci-dessus revient donc à trouver les matrices $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telles que $AX = B$.

On dit parfois de façon plus concise « le système linéaire $AX = B$ » pour désigner le système linéaire dont $AX = B$ est l'interprétation matricielle.

On considère maintenant le cas particulier d'un système (S) de n équations à n inconnues dont on note $AX = B$ la traduction matricielle et caractérisons le cas où ce système admet une unique solution (on dit alors que c'est un ***système de Cramer***).

Proposition III-11

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les trois assertions suivantes sont équivalentes :

i. A est inversible ;

ii. pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ admet une unique solution ;

iii. le système $AX = 0$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ n'admet que la solution nulle pour solution.

Démonstration

i. $\Rightarrow$ ***ii.*** Si A est inversible alors on a nécessairement $X = A^{-1}B$ donc une unique solution.

ii. $\Rightarrow$ ***i.*** On applique l'hypothèse avec chacun des seconds membres suivants :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \; B_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne des solutions que l'on note respectivement $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
On note A' la matrice dont les colonnes sont $X_1, X_2, \ldots, X_n$ alors on a $AA' = I_n$ et il reste à vérifier que $A'A = I_n$. On a :

$$\begin{aligned} A(A'A - I_n) &= AA'A - A \\ &= A I_n - A \\ &= 0. \end{aligned}$$

Si l'on note $Y_1, \ldots, Y_n$ les colonnes de la matrice $A'A - I_n$ alors le produit précédent signifie que :

$$AY_1 = 0, \ldots, \; AY_n = 0.$$

En utilisant à nouveau l'hypothèse avec un second membre nul, on constate que la seule solution de $AX = 0$ est la solution nulle donc $Y_1, \dots, Y_n$ sont tous nuls ce qui signifie que la matrice $A'A - I_n$ est nulle donc que $A'A = I_n$.

ii.* $\Rightarrow$ *iii. C'est le cas où B est nulle.

iii.* $\Rightarrow$ *ii. Soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Échelonnons la matrice augmentée $(A|0)$ du système homogène. Par hypothèse, il ne peut pas y avoir de ligne de 0 (sinon il y aurait une infinité de solutions) et comme la matrice A est carrée, on en déduit que :

$$(A|0) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & \star & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{array}\right).$$

En échelonnant de la même façon la matrice augmentée $(A|B)$ du système $AX = B$, on obtient :

$$(A|B) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & \star & \beta_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \beta_n \end{array}\right)$$

ce qui signifie que le système $AX = B$ admet une unique solution.

Remarque
Une matrice triangulaire (en particulier une matrice diagonale) est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.
En effet, considérons par exemple le cas où A est triangulaire supérieure :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Si tous les coefficients α_i sont non nuls alors le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle donc A est inversible.
Sinon, on échelonne la matrice A, il y a au plus $n-1$ pivots donc le système $AX = 0$ admet une infinité de solutions.

A.5 - Calcul de l'inverse d'une matrice

Considérons une matrice carrée inversible $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
En constatant que la relation $AX = B$ équivaut dans ce cas à la relation $X = A^{-1}B$, il suffit de traduire en termes de système la première relation avec des seconds membres quelconques puis de calculer les inconnues en fonctions de ces seconds membres.

Exemple

Cherchons l'inverse (éventuel) de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice C-64

Trouver l'inverse éventuel des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

B - Espaces vectoriels

B.1 - Définition des espaces vectoriels

Définition III-12

Soit E un ensemble muni d'une opération :

$$+ : \mathrm{E}^2 \to \mathrm{E},\ (x,y) \mapsto x+y,$$

appelée addition vérifiant :

i. $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2,\ x+y = y+x$ (commutativité) ;

ii. $\forall (x,y,z) \in \mathrm{E}^3,\ (x+y)+z = x+(y+z)$ (associativité) ;

iii. il existe un (unique) élément noté 0_E de E tel que, pour tout $x \in \mathrm{E}$, $x+0_\mathrm{E} = x$ (on dit que 0_E est l'élément neutre de l'addition) ;

iv. pour tout $x \in \mathrm{E}$, il existe un (unique) élément $y \in \mathrm{E}$ tel que $x+y = 0_\mathrm{E}$ (on dit que y est l'opposé de x et est noté $-x$) ;

et d'une opération :

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathrm{E} \to \mathrm{E},\ (\alpha,x) \mapsto \alpha \cdot x,$$

vérifiant :

i. $\forall x \in \mathrm{E},\ 1 \cdot x = x$;

ii. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in \mathrm{E}^2,\ \alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;

iii. $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathrm{E},\ (\alpha+\beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;

iv. $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathrm{E},\ \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$.

On dit que $(\mathrm{E},+,\cdot)$ est un ***espace vectoriel***.
Les éléments de E sont appelés ***vecteurs***.

Les éléments de $\mathbb{R}$ sont dans ce contexte appelés ***scalaires***.

Exemples

1 ► L'ensemble $\vec{\mathcal{P}}$ des vecteurs du plan est un espace vectoriel.

2 ► L'ensemble $\vec{\mathcal{E}}$ des vecteurs de l'espace est un espace vectoriel.

3 ► L'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel pour les lois données par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f \oplus g)(x) = f(x)+g(x) \ \text{ et } \ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ (\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x).$$

4 ► L'ensemble $\mathbb{R}^n$ des n-uplets de réels est un espace vectoriel pour les lois données par :

$$(x_1,x_2,\dots,x_n)+(x'_1,x'_2,\dots,x'_n) = (x_1+x'_1,x_2+x'_2,\dots,x_n+x'_n) \ \text{ et } \ \alpha \cdot (x_1,x_2,\dots,x_n) = (\alpha x_1,\alpha x_2,\dots,\alpha x_n).$$

En particulier $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.

5 ► L'ensemble $\mathbb{R}[x]$ des polynômes est un espace vectoriel pour l'addition des polynômes et la loi externe donnée par :

$$\alpha \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha a_k) x^k.$$

6 ► L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes, p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel

pour les lois données par :

$$\left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}+\left(b_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}=\left(a_{i,j}+b_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}\ \text{ et }\ \alpha\cdot\left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}=\left(\alpha a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}.$$

7 ► Soit $(\mathrm{E},+,\cdot)$ et $(\mathrm{F},+,\cdot)$ deux espaces vectoriels.
On définit sur le produit cartésien $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$ les opérations suivantes :

$$\forall\big((x,y),(x',y')\big)\in(\mathrm{E}\times\mathrm{F})^2,\ \ (x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$$
$$\forall(x,y)\in\mathrm{E}\times\mathrm{F},\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \ \lambda.(x,y)=(\lambda\cdot x,\lambda\cdot y)$$

On montre alors facilement que ces opérations font de $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$ un espace vectoriel (appelé *espace vectoriel produit*).
On peut définir de même le produit $\mathrm{E}_1\times\mathrm{E}_2\times\cdots\times\mathrm{E}_n$ d'une famille de k espaces vectoriels $\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2,\ldots,\mathrm{E}_n$, les opérations se faisant « composante par composante ».
Par exemple, pour tout entier $n\geqslant 2$, l'ensemble $\mathbb{R}^n$ des n-uplets de scalaires est un espace vectoriel.

Notons la propriété élémentaire (mais fondamentale) suivante :

Lemme III-13

Soit E un espace vectoriel, $\lambda\in\mathbb{R}$ et $x\in\mathrm{E}$, alors :

$$\lambda\cdot x=0_{\mathrm{E}}\iff\lambda=0_{\mathbb{R}}\text{ ou }x=0_{\mathrm{E}}.$$

Démonstration

• Tout d'abord, on montre que pour tout $y\in\mathrm{E}$, on a :

$$y+y=y\iff y=0_{\mathrm{E}}.$$

Si $y=0_{\mathrm{E}}$ alors il s'agit de l'élément neutre pour l'addition donc $y+y=y+0_{\mathrm{E}}=y$.
Réciproquement :

$$\begin{aligned}(-y)+(y+y)&=\big((-y)+y\big)+y\ \text{(associativité)}\\&=0_{\mathrm{E}}+y\ \text{(définition de l'opposé de }y)\\&=y\ \text{(définition de }0_{\mathrm{E}}\text{ et commutativité),}\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}(-y)+(y+y)&=(-y)+y\ \text{(par l'hypothèse }y+y=y)\\&=0_{\mathrm{E}}\ \text{(définition de l'opposé de }y).\end{aligned}$$

On a donc $y=0_{\mathrm{E}}$.
• On revient à l'équivalence initiale.
$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\lambda=0_{\mathbb{R}}$ alors l'une des propriétés d'un e.v. donne :

$$\big(0_{\mathbb{R}}.x\big)+\big(0_{\mathbb{R}}.x\big)=\big(0_{\mathbb{R}}+0_{\mathbb{R}}\big).x\ \ i.e.\ \ \big(0_{\mathbb{R}}.x\big)+\big(0_{\mathbb{R}}.x\big)=0_{\mathbb{R}}.x,$$

et la remarque préliminaire donne $0_{\mathbb{R}}.x=0_{\mathrm{E}}$.
Par ailleurs, si $x=0_{\mathrm{E}}$ alors l'une des propriétés d'un e.v. donne :

$$\big(\lambda.0_{\mathrm{E}}\big)+\big(\lambda.0_{\mathrm{E}}\big)=\lambda\big(0_{\mathrm{E}}+0_{\mathrm{E}}\big)\ \ i.e.\ \ \big(\lambda.0_{\mathrm{E}}\big)+\big(\lambda.0_{\mathrm{E}}\big)=\lambda.0_{\mathrm{E}}$$

et le même argument donne $\lambda.0_{\mathrm{E}}=0_{\mathrm{E}}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que $\lambda.x = 0_E$ avec $\lambda \neq 0_{\mathbb{R}}$.
Puisque $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on peut considérer l'inverse $\frac{1}{\lambda}$ de λ alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}.(\lambda.x) &= \left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right).x \\ &= 1_{\mathbb{R}}.x \\ &= x,\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}.(\lambda.x) &= \frac{1}{\lambda}.0_E \\ &= 0_E,\end{aligned}$$

d'où $x = 0_E$.

Exercice C-65

Montrer que :

1. pour tout $x \in E$, on a : $-x = (-1_{\mathbb{R}}) \cdot x$;
2. pour tous $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a : $\lambda \cdot (x - y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y$;
3. pour tous $x \in E$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a : $(\lambda - \mu) \cdot x = \lambda \cdot x - \mu \cdot x$;
4. pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a : $(-\lambda) \cdot (-x) = \lambda \cdot x$.

B.2 - Définition des sous-espaces vectoriels et exemples fondamentaux

Dans toute la section, E désigne un espace vectoriel.

Définition III-14

Soit F une partie de E.
On dit que F est un ***sous-espace vectoriel de*** E (s.e.v.) lorsque F est non vide et :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in F^2,\ x + y \in F \text{ et } \lambda \cdot x \in F,$$

ce qui équivaut à :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in F^2,\ \lambda \cdot x + y \in F.$$

Remarque
Cela revient à dire qu'un s.e.v. de E est une partie non vide de E, stable pour + et · et cela induit qu'un sous-espace vectoriel de E est *a fortiori* un espace vectoriel.

Exemples

1 ► Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ et $\mathrm{F} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x+z=0\right\}$.

2 ► Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ et $\mathrm{F} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x \geqslant z\right\}$.

3 ► Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{R}_n[x]$ des polynômes de degré au plus n est un s.e.v. de $\mathbb{R}[x]$.

4 ► Soit $\mathrm{E} = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\mathrm{F} = \{f \in \mathrm{E}; f(0) = 2\}$.

5 ► Soit $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et F l'ensemble des matrices symétriques de E.

Définition III-15

1. Les ensembles $\{0_E\}$ et E sont les ***sous-espaces vectoriels triviaux*** de E.
2. Soit $(u_1, \dots, u_k) \in E^k$, on pose $F = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot u_i \ ; \ (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k \right\}$.
   Alors F est un s.e.v. de E appelé le ***sous-espace vectoriel engendré par*** $(u_1, \dots, u_k)$; on note :
   $$F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k).$$
3. Si u est un vecteur non nul de E alors le sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}(u)$ de E engendré par le vecteur u est appelé la ***droite vectorielle engendrée par*** u (ou ***de vecteur directeur*** u).

Exemples

1 ► Dans $E = \mathbb{R}^3$, on pose $u = (1, 1, 0)$ et $v = (1, 0, 1)$ alors :

2 ► Dans $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on a :

$$\text{Vect}(I_2) =$$

3 ► Dans $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on note F le s.e.v. des matrices symétriques alors :

4 ► Dans $E = \vec{\mathcal{P}}$, si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors $\text{Vect}(\vec{u})$ est l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\vec{u}$.

Exercice C-66

Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

1. $\mathrm{E}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 2x+3y=0\right\}$

2. $\mathrm{E}_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y=0\right\}$

3. $\mathrm{E}_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2=xy\right\}$

4. $\mathrm{E}_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x-y \geqslant 0\right\}$

5. $\mathrm{E}_5 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ xy=0\right\}$

6. $\mathrm{E}_6 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x=y\right\}$

7. $\mathrm{E}_7 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x+y=1\right\}$

8. $\mathrm{E}_8 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x+y=0\right\}$

Exercice C-67

Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

1. $\mathrm{E}_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x+y+z=0\right\}$

2. $\mathrm{E}_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ 2x=3y=z\right\}$

3. $\mathrm{E}_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x+y+z=1\right\}$

4. $\mathrm{E}_4 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ yz=0\right\}$

5. $\mathrm{E}_5 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x-y+3z=2x-y+z=0\right\}$

6. $\mathrm{E}_6 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x-y+z=0\right\}$

7. $\mathrm{E}_7 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x \geqslant 0\right\}$

8. $\mathrm{E}_8 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\right\}$

Exercice C-68

Les sous-ensembles suivants de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

1. $\mathrm{E}_1 = \left\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ ; \ 2f(0)=f(1)\right\}$

2. $\mathrm{E}_2 = \left\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ ; \ f(0)=f(1)+1\right\}$

3. $\mathrm{E}_3 = \left\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ ; \ \forall x \in \mathbb{R}, f(1-x)=f(x)\right\}$

4. $\mathrm{E}_4 = \left\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ ; \ f(0)=0\right\}$

5. $\mathrm{E}_5 = \left\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ ; \ f \text{ s'annule}\right\}$

6. $\mathrm{E}_6 = \left\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ ; \ f \text{ croissante}\right\}$

7. $\mathrm{E}_7 = \left\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ ; \ f \text{ impaire}\right\}$

8. $\mathrm{E}_8 = \left\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ ; \ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\right\}$

Exercice C-69

Les sous-ensembles suivants de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3 sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

1. L'ensemble E_1 des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ triangulaires supérieures.

2. L'ensemble E_2 des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonales.

3. L'ensemble E_3 des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de termes diagonaux tous non nuls.

4. L'ensemble E_4 des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les termes diagonaux sont tous nuls.

5. L'ensemble E_5 des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont la somme des termes diagonaux est nulle.

6. L'ensemble E_6 des matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

B.3 - Intersection de sous-espaces vectoriels

On considère un espace vectoriel E.

Proposition III-16

Si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-espaces vectoriels de E alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

Remarques

1 ► En particulier, si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

2 ► On n'a pas de résultat analogue pour la réunion. Plus précisément, si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E alors :

$$F_1 \cup F_2 \text{ est un s.e.v. de E} \iff F_1 \subset F_2 \text{ ou } F_2 \subset F_1.$$

Exercice C-70

Soit E_1, E_2 et E_3 les trois sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x+2y-z=0\}$, $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x+y+z=0\}$ et $E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ y=0\}$.

1. Montrer que E_1, E_2 et E_3 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2. Écrire chacun des sous-espaces vectoriels suivants sous la forme d'un sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs : E_1, E_2, E_3, $E_1 \cap E_2$, $E_2 \cap E_3$, $E_3 \cap E_1$ et $E_1 \cap E_2 \cap E_3$.

Exercice C-71

On considère un espace vectoriel E et une partie non vide A de E.
On appelle ***sous-espace vectoriel engendré*** par A, et l'on note Vect(A), l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A.

1. Montrer que Vect(A) est un sous-espace vectoriel de E.

2. Montrer que Vect(A) est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant A c'est-à-dire pour tout sous-espace vectoriel F de E contenant A on a $\text{Vect}(A) \subset F$.

3. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\text{Vect}(A) = A$.

4. On considère une partie B de E telle que $A \subset B$. Montrer que : $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.

5. On note F l'ensemble des *combinaisons linéaires* des familles de vecteurs de A c'est-à-dire :

$$F = \left\{x \in E \ ; \ \exists k \in \mathbb{N}^*, \exists (a_1,\dots,a_k) \in A^k, \exists (\lambda_1,\dots,\lambda_k) \in \mathbb{R}^k \ / \ x = \lambda_1.a_k + \cdots + \lambda_k.a_k\right\}.$$

Montrer que $F = \text{Vect}(A)$.

Notons que «par convention», on a : $\text{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$.

B.4 - Notion de famille génératrice d'un sous-espace vectoriel

Dans toute cette section, E désigne un espace vectoriel.
Si $x_1,\dots,x_n$ sont des vecteurs de E alors une ***combinaison linéaire*** des vecteurs $x_1,\dots,x_n$ est un vecteur de la forme :

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

Définition III-17

Soit F un sous-espace vectoriel de E et $x_1,\dots,x_k$ des vecteurs de F.
On dit que $(x_1,\dots,x_k)$ est une ***famille génératrice de*** F lorsque $F = \text{Vect}(x_1,\dots,x_k)$ c'est-à-dire :

$$\forall x \in F,\ \exists(\lambda_1,\dots,\lambda_k) \in \mathbb{R}^k / x = \lambda_1.x_1 + \lambda_2.x_2 + \cdots + \lambda_k.x_k.$$

Exemples

1 ► Si D est une droite vectorielle et si $x \in D \setminus \{0_E\}$ alors (x) est une famille génératrice de D.

2 ► Dans $E = \mathbb{R}^2$, on pose $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$.
Alors tout $(x,y) \in \mathbb{R}$ s'écrit $(x,y) = x.e_1 + y.e_2$ donc (e_1,e_2) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

3 ► Dans $\mathbb{R}_n[x]$, une famille génératrice est $(1,x,x^2,\dots,x^n)$ puisque tout élément de $\mathbb{R}_n[x]$ s'écrit :

$$\lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 \cdot x + \lambda_2 \cdot x^2 + \cdots + \lambda_n \cdot x^n.$$

4 ► Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, toute matrice s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i.e. une famille génératrice est constituée par ces quatre matrices.

5 ► Plus généralement, dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, une famille génératrice est constituée par la famille des matrices $E_{i,j}$, pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$, dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à la place (i,j) qui vaut 1.
En effet, considérons $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ alors : $A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}E_{i,j}$.

Exercice C-72

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\mathbf{a} = (0,1,1)$, $\mathbf{b} = (1,1,0)$ et $\mathbf{c} = (1,1,1)$.
Montrer que $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Exercice C-73

Montrer que l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en est un sous-espace vectoriel et en déterminer une famille génératrice.
Même question avec les matrices antisymétriques.

On dit que $\mathcal{G}$ est une ***sous-famille*** de $\mathcal{F} = (x_1, ..., x_n)$ si $\mathcal{G} = (x_{i_1}, ..., x_{i_p})$ avec $i_1 < ... < i_p$ dans $[\![1, n]\!]$.

Par exemple, la famille (x_1, x_4, x_5) est une sous-famille de $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. Les trois indices de la définition sont ici $i_1 = 1$, $i_2 = 4$ et $i_3 = 5$.

De même, on dit que $\mathcal{H}$ est une ***sur-famille*** de $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F}$ est une sous-famille de $\mathcal{H}$.

Par convention, la famille vide est une sous-famille de n'importe quelle famille de vecteurs.
Notons que l'on écrit souvent $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ ou on dit que « $\mathcal{F}$ contient $\mathcal{G}$ » pour dire que $\mathcal{G}$ est une sous-famille de $\mathcal{F}$ bien qu'il ne s'agisse pas d'une inclusion d'ensembles.

Remarques

1 ► Si $\mathcal{G}$ est une sous-famille de $\mathcal{F}$ alors toute combinaison linéaire de $\mathcal{G}$ est aussi une combinaison linéaire de $\mathcal{F}$ (il suffit de mettre $0_{\mathbb{R}}$ devant les vecteurs qui ne sont pas dans $\mathcal{G}$).

2 ► Si $\mathcal{G}$ est une famille obtenue à partir de $\mathcal{F}$ en permutant les vecteurs, alors les combinaisons linéaires de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{G}$ sont exactement les mêmes (d'après la commutativité de l'addition).

3 ► Une sur-famille d'une famille génératrice est génératrice ; une sous-famille d'une famille qui n'est pas génératrice n'est pas génératrice.

Proposition III-18 (redondance d'un vecteur dans une famille génératrice)

Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille génératrice de E, on suppose que l'on peut écrire :

$$e_i = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{i-1} e_{i-1} + \lambda_{i+1} e_{i+1} + \cdots + \lambda_k e_k$$

alors la famille $(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_k)$ est génératrice.

Ce dernier résultat signifie que, si dans une famille génératrice certains vecteurs s'expriment en fonction des autres alors on peut les retirer et la famille obtenue est toujours génératrice.
Démonstration

