

Exercice 1

On considère un entier naturel $n \geq 1$. À l'aide d'un **raisonnement par contraposée**, montrer que si $n^2 - 1$ n'est pas un multiple de 8 alors l'entier n est pair.

On va montrer que si n n'est pas pair alors $n^2 - 1$ est un multiple de 8.

Supposons que n ne soit pas pair alors il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$. On en déduit :

$$n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 \text{ i.e. } n^2 - 1 = 4k^2 + 4k.$$

Cela conduit à envisager deux cas selon la parité de k .

- Si k est pair alors il existe un entier ℓ tel que $k = 2\ell$ ce qui donne :

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= 4(2\ell)^2 + 4(2\ell) \\ &= 16\ell^2 + 8\ell \\ &= 8(2\ell^2 + \ell). \end{aligned}$$

- Sinon, il existe un entier ℓ tel que $k = 2\ell + 1$ ce qui donne :

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= 4(2\ell + 1)^2 + 4(2\ell + 1) \\ &= 4(4\ell^2 + 4\ell + 1) + 8\ell + 4 \\ &= 16\ell^2 + 24\ell + 8 \\ &= 8(2\ell^2 + 3\ell + 1). \end{aligned}$$

Dans tous les cas, on peut écrire $n^2 - 1 = 8m$ avec m entier donc 8 divise $n^2 - 1$.

On a montré que si n n'est pas pair alors $n^2 - 1$ est un multiple de 8.

Cela équivaut à :

$$\boxed{\text{si } n^2 - 1 \text{ n'est pas un multiple de 8 alors } n \text{ est pair.}}$$

Notons que l'on pouvait aussi écrire $n^2 - 1 = 4k(k + 1)$ or $k(k + 1)$ est le produit de deux entiers consécutifs donc est pair et par conséquent $4k(k + 1)$ est divisible par 8.

Exercice 2

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(2x^2 + 1)$ est bien défini.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geq 1$, on a : $\ln(2x^2 + 1) > 1$.
3. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\max\{2 - x^2 ; \ln(2x^2 + 1)\} > 1$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geq 0$ donc $2x^2 + 1 > 0$.

Par conséquent $\ln(2x^2 + 1)$ est bien défini.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x| \geq 1$ alors $2x^2 \geq 2$ puis $2x^2 + 1 \geq 3$.

On a $2 < e < 3$ donc $2x^2 + 1 > e$ et, par stricte croissance de la fonction $\ln$, on a $\ln(2x^2 + 1) > \ln(e)$ c'est-à-dire :

$$\boxed{\ln(2x^2 + 1) > 1.}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $|x| \geq 1$ alors $\ln(2x^2 + 1) > 1$ (et d'autre part $x^2 \geq 1$ donc $2 - x^2 \leq 1$).
- Si $|x| < 1$ alors $x^2 < 1$ donc $2 - x^2 > 1$.

Dans les deux cas, on a donc :

$$\boxed{\max\{2 - x^2 ; \ln(2x^2 + 1)\} > 1.}$$

Exercice 3

Les questions de cet exercice sont indépendantes. À chaque question, n désigne un entier naturel non nul.

1. Calculer : $S_1 = \sum_{k=1}^n k(1-k).$

2. Calculer : $S_2 = \sum_{k=1}^n \frac{2^{k-1}}{5^{k+1}}.$

3. Calculer : $S_3 = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} (2i-j)^2.$

4. Calculer : $S_4 = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 3^{i+j}.$

1. On a :

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=1}^n (k - k^2) \\ &= \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \left(1 - \frac{2n+1}{3} \right) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \frac{3 - (2n+1)}{3} \end{aligned}$$

donc : $S_1 = \frac{n(n+1)(1-n)}{3}.$

2. On a :

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=1}^n \frac{2^{k-1}}{5^{k+1}} \\ &= \frac{1}{5^2} \sum_{k=1}^n \frac{2^{k-1}}{5^{k-1}} \\ &= \frac{1}{5^2} \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{2^\ell}{5^\ell} \end{aligned}$$

or $\frac{2}{5} \neq 1$ donc :

$$S_2 = \frac{1}{25} \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \frac{2}{5}}$$

puis :

$$S_2 = \frac{1}{15} \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n \right).$$

3. On a :

$$\begin{aligned}
 S_3 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (4i^2 - 4ij + j^2) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(4i^2 \sum_{j=1}^n 1 - 4i \sum_{j=1}^n j + \sum_{j=1}^n j^2 \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(4ni^2 - 4i \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\
 &= 4n \sum_{i=1}^n i^2 - 2n(n+1) \sum_{i=1}^n i + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \sum_{i=1}^n 1 \\
 &= 2n \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - n^2(n+1)^2 + \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= n^2(n+1) \frac{1}{6} (4(2n+1) - 6(n+1) + (2n+1)) \\
 &= n^2(n+1) \frac{1}{6} (4n-1)
 \end{aligned}$$

donc :

$$S_3 = \frac{n^2(n+1)(4n-1)}{6}.$$

4. On a :

$$\begin{aligned}
 S_4 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n 3^{i+j} \\
 &= \sum_{i=1}^n 3^i \left(\sum_{j=i}^n 3^j \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n 3^i 3^i \left(\sum_{j=i}^n 3^{j-i} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n 3^{2i} \left(\sum_{k=0}^{n-i} 3^k \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n 3^{2i} \frac{1-3^{n-i+1}}{1-3} \quad \text{car } 3 \neq 1 \\
 &= \sum_{i=1}^n 3^{2i} \frac{3^{n-i+1} - 1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (3^{n+i+1} - 3^{2i}) \\
 &= \frac{1}{2} \left(3^{n+2} \sum_{i=1}^n 3^{i-1} - 9 \sum_{i=1}^n 9^{i-1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(3^{n+2} \frac{3^n - 1}{3 - 1} - 9 \frac{9^n - 1}{9 - 1} \right) \quad \text{car } 3 \neq 1 \text{ et } 9 \neq 1 \\
 &= \frac{1}{4} (3^{2n+2} - 3^{n+2}) - \frac{9^{n+1} - 9}{16} \\
 &= \frac{1}{4} (9^{n+1} - 3^{n+2}) - \frac{9^{n+1} - 9}{16}
 \end{aligned}$$

donc :

$$S_4 = \frac{3 \cdot 9^{n+1} - 4 \cdot 3^{n+2} + 9}{16}.$$

Exercice 4

1. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

2. Justifier avec soin que, pour tout entier $m \geq 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^m (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{m+1} - 1.$$

3. En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$2\sqrt{n+1} - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1.$$

4. **a.** Montrer que : $1 - 2(\sqrt{17} - \sqrt{16}) \in]0, 1[$.

b. À l'aide de l'inégalité de la question 3, déterminer la partie entière du réel suivant :

$$x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{16}}.$$

1. Considérons un entier $k \geq 1$, alors :

$$\begin{aligned} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} &= (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \frac{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$0 < 2\sqrt{k} < \sqrt{k+1} + \sqrt{k} < 2\sqrt{k+1},$$

puis par passage à l'inverse :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}}.}$$

2. Soit $m \geq 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) &= \sum_{k=1}^m \sqrt{k+1} - \sum_{k=1}^m \sqrt{k} \\ &= \sum_{k'=2}^{m+1} \sqrt{k'} - \sum_{k=1}^m \sqrt{k} \\ &= \left(\sum_{k=2}^m \sqrt{k} + \sqrt{m+1} \right) - \left(\sqrt{1} + \sum_{k=2}^m \sqrt{k} \right) \end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{\sum_{k=1}^m (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{m+1} - 1.}$$

3. On a :

$$\forall k \geq 1, \quad 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}}$$

d'où en sommant pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\sum_{k=1}^n 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

puis, en utilisant la question précédente :

$$2(\sqrt{n+1} - 1) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

D'autre part, on a :

$$\forall k \geq 1, \quad \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$

d'où en sommant pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \sum_{k=1}^{n-1} 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$

puis, en décalant les indices et en utilisant la question précédente :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < 2(\sqrt{n} - 1)$$

puis en ajoutant 1 de part et d'autre :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} - 1.$$

On a donc bien :

$$2\sqrt{n+1} - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1.$$

4. a. La première question donne :

$$0 < \frac{1}{\sqrt{17}} < 2(\sqrt{17} - \sqrt{16}) < \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$$

donc :

$$0 < 2(\sqrt{17} - \sqrt{16}) < 1$$

puis :

$$0 < 1 - 2(\sqrt{17} - \sqrt{16}) < 1.$$

b. La double inégalité de la question 3 donne pour $n = 16$:

$$2\sqrt{17} - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{16}} < 2\sqrt{16} - 1 = 7.$$

L'écart entre le majorant et le minorant est d'après la question précédente :

$$(2\sqrt{16} - 1) - (2\sqrt{17} - 2) = 1 - 2(\sqrt{17} - \sqrt{16}) \in]0, 1[$$

donc :

$$6 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{16}} < 7$$

ce qui induit :

$$\left\lfloor 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{16}} \right\rfloor = 6.$$

Exercice 5

Résoudre, en fonction des valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$, l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivante :

$$(I) : (m^2 + m)x \leq m^2 + 1.$$

Tout d'abord, on peut écrire :

$$(I) \iff m(m+1)x \leq m^2 + 1.$$

• Si $m = 0$ ou $m = -1$ alors $m(m+1) = 0$ donc :

$$(I) \iff 0 \leq m^2 + 1$$

donc tout réel est solution.

• Si $m > 0$ ou $m < -1$ alors $m(m+1) > 0$ donc :

$$(I) \iff x \leq \frac{m^2 + 1}{m(m+1)}.$$

• Si $-1 < m < 0$ alors $m(m+1) < 0$ donc :

$$(I) \iff x \geq \frac{m^2 + 1}{m(m+1)}.$$

En conclusion :

- Si $m = 0$ ou $m = -1$ alors l'ensemble des solutions est $\mathbb{R}$.
- Si $m > 0$ ou $m < -1$ alors l'ensemble des solutions est $\left] -\infty, \frac{m^2+1}{m(m+1)} \right]$.
- Si $-1 < m < 0$ alors l'ensemble des solutions est $\left[\frac{m^2+1}{m(m+1)}, +\infty \right[$.

Exercice 6

Soit n un entier naturel non nul.

1. Soit $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des nombres réels.

a. Exprimer la somme :

$$S_n = \sum_{(i,k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} (a_i b_k - a_k b_i)^2$$

$$\text{en fonction de } A_n = \sum_{k=1}^n a_k^2, B_n = \sum_{k=1}^n b_k^2 \text{ et } C_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

b. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$

2. Soit $x_1, \dots, x_n$ des nombres réels strictement positifs.

Montrer à l'aide de la question précédente que :

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) \geq n^2.$$

Étudier ensuite le cas d'égalité.

3. On note

$$\Gamma = \left\{ \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) ; (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \right\}.$$

Montrer que Γ admet un minimum, et préciser la valeur de ce minimum.

1. a. On développe le carré :

$$S_n = \sum_{(i,k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} (a_i^2 b_k^2 - 2a_i a_k b_i b_k + a_k^2 b_i^2).$$

Par linéarité de la somme double :

$$\sum_{(i,k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} a_i^2 b_k^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) = A_n B_n,$$

$$\sum_{(i,k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} a_k^2 b_i^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) = A_n B_n,$$

$$\sum_{(i,k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} a_i b_i a_k b_k = \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right) = C_n^2.$$

Donc

$$S_n = 2(A_n B_n - C_n^2).$$

b. Comme S_n est une somme de carrés de réels, $S_n \geq 0$, donc $A_n B_n - C_n^2 \geq 0$, c'est-à-dire $C_n^2 \leq A_n B_n$. La fonction racine carrée étant croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\sqrt{C_n^2} = |C_n|$, on obtient

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$

2. Les x_k étant strictement positifs, on pose pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$a_k = \sqrt{x_k} \quad \text{et} \quad b_k = \frac{1}{\sqrt{x_k}}.$$

Alors $a_k b_k = 1$, donc :

$$C_n = n, \quad A_n = \sum_{k=1}^n x_k \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $n \leq \sqrt{A_n} \sqrt{B_n}$, et en élevant au carré (les deux membres sont positifs) :

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) \geq n^2.$$

Étude du cas d'égalité.

Il y a égalité si et seulement si $C_n^2 = A_n B_n$, c'est-à-dire si et seulement si $S_n = 0$. Or S_n est une somme de carrés de réels : elle est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls, soit

$$\forall (i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad a_i b_k = a_k b_i, \quad i.e. \quad \sqrt{\frac{x_i}{x_k}} = \sqrt{\frac{x_k}{x_i}}.$$

En élevant au carré, $\frac{x_i}{x_k} = \frac{x_k}{x_i}$, soit $x_i^2 = x_k^2$, et comme $x_i, x_k > 0$, $x_i = x_k$. Réciproquement, si tous les x_k sont égaux à un même réel $x > 0$, alors

$$(nx) \left(\frac{n}{x} \right) = n^2.$$

Ainsi, **il y a égalité si et seulement si** $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

3. D'après la question précédente, tout élément de Γ est supérieur ou égal à n^2 donc n^2 est un minorant de Γ .

De plus, avec $x_1 = \dots = x_n = 1$ (qui appartient bien à $(\mathbb{R}_+^*)^n$), on obtient :

$$\left(\sum_{k=1}^n 1 \right) \left(\sum_{k=1}^n 1 \right) = n^2 \in \Gamma.$$

Donc n^2 est un minorant de Γ appartenant à Γ : c'est le plus petit élément de Γ .

$$\min \Gamma = n^2.$$

Exercice 7

Pour tout entier naturel n non nul, on considère le polynôme P_n défini pour tout réel x par :

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right).$$

1. Calculer $P_n(0)$, $P_n(1)$ et $P_n(-n)$.
2. Déterminer les racines de P_n .
3. Pour tout entier naturel p , exprimer $\prod_{k=1}^n (k+p)$ à l'aide de factorielles. En déduire que $P_n(p) = \binom{n+p}{p}$.
4. *Question de cours* – Montrer que pour tous entiers naturels n et k tels que $0 \leq k \leq n-1$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.
5. En déduire que pour tout entier naturel N , $\sum_{k=0}^N P_n(k) = \binom{n+N+1}{N}$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$P_n(x) = \frac{x+n}{x} P_n(x-1).$$

7. Une autre expression de $\prod_{k=1}^n (n+k)$.

a. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\prod_{k=1}^n (n+k) = 2^n \prod_{k=1}^n (2k-1).$$

b. Retrouver ce résultat par un calcul direct utilisant 3.

$$1. \bullet P_n(0) = \prod_{k=1}^n 1 \text{ donc } \boxed{P_n(0) = 1}.$$

$$\bullet P_n(1) = \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = \frac{(n+1)!}{n!} \text{ donc (produit télescopique) } \boxed{P_n(1) = n+1}.$$

$$\bullet P_n(-n) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{n}{k}\right) \text{ or le facteur d'indice } k = n \text{ vaut } 1-1 = 0 \text{ donc } \boxed{P_n(-n) = 0}.$$

2. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs l'est :

$$P_n(x) = 0 \iff \exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket / 1 + \frac{x}{k} = 0 \\ \iff \exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x = -k.$$

Les racines de P_n sont : $-1, -2, \dots, -n$.

Ce sont n racines distinctes et $\deg P_n = n$: elles sont donc toutes simples.

3. Soit $p \in \mathbb{N}$. On a :

$$\prod_{k=1}^n (k+p) = \prod_{\ell=p+1}^{n+p} \ell \\ = \frac{\prod_{\ell=1}^{n+p} \ell}{\prod_{\ell=1}^p \ell}$$

$$\text{donc } \boxed{\prod_{k=1}^n (k+p) = \frac{(n+p)!}{p!}}.$$

Donc :

$$P_n(p) = \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n (k+p) = \frac{(n+p)!}{n! p!} \quad i.e. \quad \boxed{P_n(p) = \binom{n+p}{p}}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq k \leq n-1$. Alors :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} \left[(k+1) + (n-k) \right] \\ = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} \\ = \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!}.$$

On a donc bien :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

5. D'après 3. $P_n(k) = \binom{n+k}{k}$. Montrons par récurrence sur $N \in \mathbb{N}$ la propriété :

$$\mathcal{P}(N) : \quad \ll \sum_{k=0}^N \binom{n+k}{k} = \binom{n+N+1}{N} \gg.$$

- $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(N)$ soit vraie. Alors :

$$\sum_{k=0}^{N+1} \binom{n+k}{k} = \binom{n+N+1}{N} + \binom{n+N+1}{N+1}.$$

On applique 4. avec $n+N+1$ à la place de n et $k=N$ (on a bien $0 \leq N \leq (n+N+1)-1$) :

$$\binom{n+N+1}{N} + \binom{n+N+1}{N+1} = \binom{n+N+2}{N+1}$$

donc $\mathcal{P}(N+1)$ est vraie.

- On en déduit par récurrence que $\mathcal{P}(N)$ est vraie pour tout $N \in \mathbb{N}$ c'est-à-dire :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^N P_n(k) = \binom{n+N+1}{N}.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^n \frac{k+x}{k} = \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n (x+k)$$

et (avec le changement d'indice $j = k-1$) :

$$P_n(x-1) = \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n (k+x-1) = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (x+j).$$

Comme $x \neq 0$, on peut écrire :

$$\prod_{j=0}^{n-1} (x+j) \times \frac{x+n}{x} = \prod_{j=1}^n (x+j)$$

ce qui signifie :

$$P_n(x) = \frac{x+n}{x} P_n(x-1).$$

7. a. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété

$$\mathcal{R}(n) : \quad \ll \prod_{k=1}^n (n+k) = 2^n \prod_{k=1}^n (2k-1) \gg.$$

- Le membre de gauche vaut $1+1=2$ et celui de droite $2^1 \times 1 = 2$ donc $\mathcal{R}(1)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{R}(n)$ soit vraie. On a :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} (n+1+k) &= \prod_{\ell=2}^{n+2} (n+\ell) \\ &= \prod_{\ell=1}^n (n+\ell) \times \frac{1}{n+1} \times (2n+1)(2n+2) \\ &= 2^n \prod_{k=1}^n (2k-1) \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= 2^n \prod_{k=1}^n (2k-1) \frac{(2n+1)(2(n+1))}{n+1} \\ &= 2^{n+1} \prod_{k=1}^n (2k-1) \times (2n+1) \\ &= 2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} (2k-1) \end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie.

► On en déduit par récurrence que $\mathcal{R}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^n (n+k) = 2^n \prod_{k=1}^n (2k-1).$$

b. D'après **3.** avec $p = n$,

$$\prod_{k=1}^n (n+k) = \frac{(2n)!}{n!}.$$

En séparant les facteurs pairs et impairs de $(2n)!$, on obtient :

$$\begin{aligned} (2n)! &= \prod_{k=1}^n (2k) \times \prod_{k=1}^n (2k-1) \\ &= 2^n n! \prod_{k=1}^n (2k-1). \end{aligned}$$

Donc

$$\prod_{k=1}^n (n+k) = \frac{2^n n! \prod_{k=1}^n (2k-1)}{n!}$$

et l'on retrouve :

$$\prod_{k=1}^n (n+k) = 2^n \prod_{k=1}^n (2k-1).$$