

Consignes

- L'énoncé comporte sept exercices.
Ces derniers peuvent être traités dans un ordre quelconque mais doivent être chacun commencés sur une nouvelle page et les questions doivent être séparées d'une ligne horizontale sur toute la largeur de la page.
- Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.
- La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- Les résultats doivent être mis en valeur et les pages doivent être numérotées.

Exercice 1

On considère un entier naturel $n \geq 1$. À l'aide d'un **raisonnement par contraposée**, montrer que si $n^2 - 1$ n'est pas un multiple de 8 alors l'entier n est pair.

Exercice 2

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(2x^2 + 1)$ est bien défini.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geq 1$, on a : $\ln(2x^2 + 1) > 1$.
3. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\max\{2 - x^2 ; \ln(2x^2 + 1)\} > 1$.

Exercice 3

Les questions de cet exercice sont indépendantes. À chaque question, n désigne un entier naturel non nul.

1. Calculer : $S_1 = \sum_{k=1}^n k(1-k).$
2. Calculer : $S_2 = \sum_{k=1}^n \frac{2^{k-1}}{5^{k+1}}.$
3. Calculer : $S_3 = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} (2i-j)^2.$
4. Calculer : $S_4 = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 3^{i+j}.$

Exercice 4

1. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

2. Justifier avec soin que, pour tout entier $m \geq 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^m (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{m+1} - 1.$$

3. En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$2\sqrt{n+1} - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1.$$

4. *a.* Montrer que : $1 - 2(\sqrt{17} - \sqrt{16}) \in]0, 1[.$

b. À l'aide de l'inégalité de la question 3, déterminer la partie entière du réel suivant :

$$x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{16}}.$$

Exercice 5

Résoudre, en fonction des valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$, l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivante :

$$(I) : (m^2 + m)x \leq m^2 + 1.$$

Exercice 6

Soit n un entier naturel non nul.

1. Soit $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des nombres réels.

a. Exprimer la somme :

$$S_n = \sum_{(i,k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} (a_i b_k - a_k b_i)^2$$

$$\text{en fonction de } A_n = \sum_{k=1}^n a_k^2, B_n = \sum_{k=1}^n b_k^2 \text{ et } C_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

b. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$

2. Soit $x_1, \dots, x_n$ des nombres réels strictement positifs.

Montrer à l'aide de la question précédente que :

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) \geq n^2.$$

Étudier ensuite le cas d'égalité.

3. On note

$$\Gamma = \left\{ \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) ; (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \right\}.$$

Montrer que Γ admet un minimum, et préciser la valeur de ce minimum.

Exercice 7

Pour tout entier naturel n non nul, on considère le polynôme P_n défini pour tout réel x par :

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right).$$

1. Calculer $P_n(0)$, $P_n(1)$ et $P_n(-n)$.
2. Déterminer les racines de P_n .
3. Pour tout entier naturel p , exprimer $\prod_{k=1}^n (k+p)$ à l'aide de factorielles.

En déduire que $P_n(p) = \binom{n+p}{p}$.

4. *Question de cours* – Montrer que pour tous entiers naturels n et k tels que $0 \leq k \leq n-1$,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

5. En déduire que pour tout entier naturel N ,

$$\sum_{k=0}^N P_n(k) = \binom{n+N+1}{N}.$$

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$P_n(x) = \frac{x+n}{x} P_n(x-1).$$

7. **Une autre expression de $\prod_{k=1}^n (n+k)$.**

- a.* Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\prod_{k=1}^n (n+k) = 2^n \prod_{k=1}^n (2k-1).$$

- b.* Retrouver ce résultat par un calcul direct utilisant 3.