Objectifs et savoir-faire

- *Études de fonctions*
  - Représenter une fonction du type $x \mapsto f(kx)$, $x \mapsto f(x+k)$, etc. à partir d'une fonction connue.
  - Maîtriser la notion de composition de fonctions.
  - Maîtriser le vocabulaire «global» lié au fonctions : (im)parité, périodicité, majoré, minoré, borné, monotonie, stricte monotonie.
  - Notion d'asymptote au graphe d'une fonction.
  - Notions intuitives de limite, continuité, dérivabilité, dérivée ; formulaire de dérivées usuelles.
  - Connaître les propriétés des fonctions de référence, notamment exp, ln, $x \mapsto x^\alpha$, cos, sin et tan.
  - Connaître les limites par croissances comparées.
  - Étudier les variations d'une fonction et la représenter graphiquement.
- *Systèmes linéaires*
  - Résoudre un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss.
  - Résoudre un système en discutant selon les valeurs d'un paramètre.

► Note aux colleurs :

- pas de théorie sur les systèmes linéaires, seulement la pratique de résolution ;
- il y a des exercices de cours sur les matrices mais les exercices «originaux» de la colle ne doivent porter sur ce thème.

► Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :

1. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2 et donnée sur $[-1,1]$ par :

$$\forall x \in [-1,1],\ f(x) = |x|.$$

Représenter graphiquement (en expliquant) la fonction f sur l'intervalle $[-5,5]$ puis déterminer l'expression de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Prouver l'inégalité suivante :

$$\forall u \in \mathbb{R}_+,\ \ln(1+u) \geqslant u - \frac{u^2}{2}.$$

3. Résoudre, en fonction du réel a, le système suivant :

$$(\mathrm{S}_a) \quad \begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ x + ay + az = 0 \\ -x + 2y + 2z = 0 \end{cases}.$$

4. Résoudre, en fonction de la valeur du réel λ, le système suivant :

$$(\mathrm{S}_\lambda) \quad \begin{cases} x - 2y + 2z = \lambda x \\ -2x + y - 2z = \lambda y \\ 2x - 2y + z = \lambda z \end{cases}.$$

5. Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Exprimer A^2 en fonction de A et I_3 puis en déduire A^{-1}.

6. Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures A et B est une matrice triangulaire supérieure et que les coefficients diagonaux de AB sont les produits de ceux de A et de B.

7. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^t(\mathrm{AB}) = {}^t\mathrm{B}\,{}^t\mathrm{A}$.