CHAPITRE

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

C-6

1. • Supposons que M = sup(A). Tout d'abord, puisque M est un majorant de A, on a :

$$\forall x \in \mathrm{A},\ x \leqslant \sup(\mathrm{A}).$$

Soit $\varepsilon > 0$ (quelconque). Puisque M est le plus petit des majorants de A, $\mathrm{M} - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A donc :

$$\exists x \in \mathrm{A} \,/\, \mathrm{M} - \varepsilon < x.$$

On a donc :

$$\exists x \in \mathrm{A} \,/\, \mathrm{M} - \varepsilon < x \leqslant \mathrm{M}.$$

• Supposons que M soit un majorant de A vérifiant :

$$\exists x \in \mathrm{A} \,/\, \mathrm{M} - \varepsilon < x \leqslant \mathrm{M}.$$

Soit M' un réel avec M' < M. En posant $\varepsilon = \mathrm{M} - \mathrm{M}'$, on a $\varepsilon > 0$ et $\mathrm{M}' = \mathrm{M} - \varepsilon$.
Par hypothèse, il existe $x \in \mathrm{A}$ tel que : $\mathrm{M} - \varepsilon < x \leqslant \mathrm{M}$.
On a donc $\mathrm{M}' < x$ ce qui induit que M' n'est pas un majorant de A.
Il s'ensuit que M est le plus petit des majorants de A *i.e.* M = sup(A).

2. La démonstration est analogue à la précédente.

C-11

L'ensemble des solutions de cette équation est : $\boxed{\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}}$.

C-12

Soit $x \in [0, \pi]$ alors $2x \in [0, 2\pi]$ et l'on a :

$$\begin{aligned} 2\cos(2x) \geqslant 1 &\iff \cos(2x) \geqslant \frac{1}{2} \\ &\iff 0 \leqslant 2x \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \leqslant 2x \leqslant 2\pi \\ &\iff 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \leqslant x \leqslant \pi \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$$\boxed{\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]}.$$

C-27

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculons les coefficients de :

$$\mathrm{P}_n(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^n)^2.$$

On écrit $\mathrm{P}_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)^2$ avec tous les a_k égaux à 1.

• Pour $k \in [\![0, n]\!]$, le coefficient de x^k dans $\mathrm{P}_n(x)$ est :

$$a_0 a_k + a_1 a_{k-1} + \cdots + a_{k-1} a_1 + a_k a_0 = k + 1.$$

• Pour $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, le coefficient de x^k dans $\mathrm{P}_n(x)$ est :

$$\begin{aligned} a_0 a_k + \cdots + a_{k-n-1} a_{n+1} + a_{k-n} a_n \\ + a_{k-n+1} a_{n-1} + \cdots + a_{n-1} a_{k-n+1} \\ + a_n a_{k-n} + a_{n+1} a_{k-n-1} + \cdots + a_k a_0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$0 + a_{k-n} a_n + \cdots + a_n a_{k-n} + 0 = n - (k - n) + 1$$

donc le coefficient est $2n - k + 1$.