CHAPITRE II

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

C-34

Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{3} &= \frac{3 + 2u_n - \sqrt{3}(2 + u_n)}{2 + u_n} \\ &= \frac{(2 - \sqrt{3})u_n - \sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{2 + u_n} \\ &= \frac{(2 - \sqrt{3})(u_n - \sqrt{3})}{2 + u_n}, \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} u_{n+1} + \sqrt{3} &= \frac{3 + 2u_n + \sqrt{3}(2 + u_n)}{2 + u_n} \\ &= \frac{(2 + \sqrt{3})(u_n + \sqrt{3})}{2 + u_n}. \end{aligned}$$

En divisant, on obtient :

$$v_{n+1} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}\, v_n = (2 - \sqrt{3})^2\, v_n,$$

donc v est géométrique de raison $q = (2-\sqrt{3})^2 = 7-4\sqrt{3}$.

On a :

$$v_0 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{-1 + \sqrt{3}} = -\frac{(1 + \sqrt{3})^2}{2} = -(2 + \sqrt{3}).$$

D'où :

$$v_n = v_0\, q^n = -(2 - \sqrt{3})^{2n-1}.$$

De $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$, on tire après calculs :

$$\boxed{u_n = \sqrt{3}\, \frac{1 - (2 - \sqrt{3})^{2n-1}}{1 + (2 - \sqrt{3})^{2n-1}}}$$

C-11

L'ensemble des solutions de cette équation est :

$$\boxed{\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}.}$$

C-39

Posons $f(x) = -x^2 + 2x + 1$, de sorte que $u_{n+1} = f(u_n)$.
On calcule : $u_0 = 2$, $u_1 = f(2) = 1$, $u_2 = f(1) = 2$.
Cela suggère de montrer par récurrence sur l'entier k, la propriété :

$$\mathcal{P}(k) : \quad \text{« } u_{2k} = 2 \text{ et } u_{2k+1} = 1 \text{ ».}$$

• $u_0 = 2$ et $u_1 = 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
• Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie. Alors :

$$u_{2k+2} = f(u_{2k+1}) = f(1) = 2,$$

$$u_{2k+3} = f(u_{2k+2}) = f(2) = 1,$$

donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
• On en déduit par récurrence que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc

$$u_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}.$$

Donc la suite u est périodique, de période 2.

C-49

Puisque f et g sont définies sur $\mathbb{R}$, il en est de même de $g \circ f$ et $\mathbb{R}$ est bien symétrique par rapport à 0.
Pour tout réel x, on a :

$$(g \circ f)(-x) = g\Big(f(-x)\Big).$$

• Si f n'est ni paire ni impaire alors on ne peut rien dire de plus (trouvez des exemples !).
• Si f est paire alors :

$$(g \circ f)(-x) = g\Big(f(x)\Big) = (g \circ f)(x)$$

donc $g \circ f$ est paire (sans hypothèse sur g).
• Si f est impaire alors :

$$(g \circ f)(-x) = g\Big(-f(x)\Big).$$

Si g est paire alors on obtient :

$$(g \circ f)(-x) = g\Big(f(x)\Big) = (g \circ f)(x)$$

donc $g \circ f$ est paire.
Si g est impaire alors on obtient :

$$(g \circ f)(-x) = -g\Big(f(x)\Big) = -(g \circ f)(x)$$

donc $g \circ f$ est impaire.
On ne peut en revanche rien dire si g n'est ni paire ni impaire.

C-51

La fonction f_1 est $\frac{\mathrm{T}}{k}$-périodique et les trois autres fonctions sont T-périodiques.

C-54

1. Tout d'abord :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2}{x}\frac{3+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x}} \\ &= x\,\frac{3+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x}} \\ &\xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty. \end{aligned}$$

On a de plus :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{3+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 3$$

puis :

$$\begin{aligned} f(x) - 3x &= \frac{3x^2+1}{x+3} - \frac{3x(x+3)}{x+3} \\ &= \frac{3x^2+1-(3x^2+9x)}{x+3} \\ &= \frac{1-9x}{x+3} \\ &= \frac{-9+\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}} \\ &\xrightarrow[x\to+\infty]{} -9. \end{aligned}$$

Donc le graphe de f admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation :

$$y = 3x - 9.$$

2. Tout d'abord :

$$\begin{aligned} g(x) &= x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\ &\xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty. \end{aligned}$$

On a de plus :

$$\frac{g(x)}{x} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

puis :

$$\begin{aligned} g(x) - x &= \sqrt{x} \\ &\xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty. \end{aligned}$$

Donc le graphe de g n'admet pas d'asymptote en $+\infty$. Cependant, on dit (ce n'est pas au programme) que le graphe de g admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = x$.

3. Tout d'abord, on a pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} h(x) &= x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \\ &\xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty. \end{aligned}$$

On a de plus :

$$\frac{h(x)}{x} = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

puis :

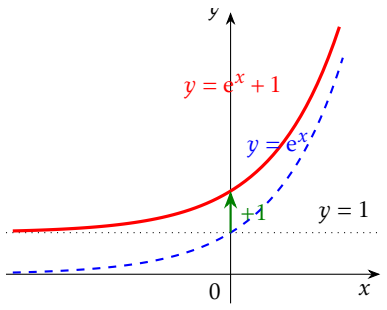
$$\begin{aligned} h(x) - x &= \sqrt{1+x^2} - x \\ &= \frac{(1+x^2)-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} \\ &\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Donc le graphe de h admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation :

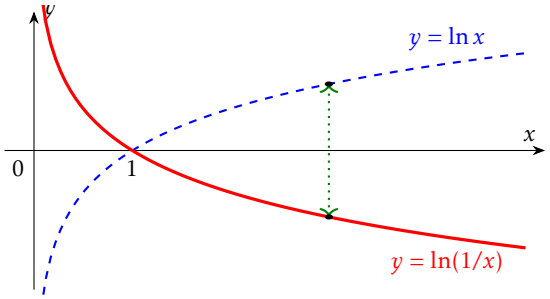
$$y = x.$$

C-55

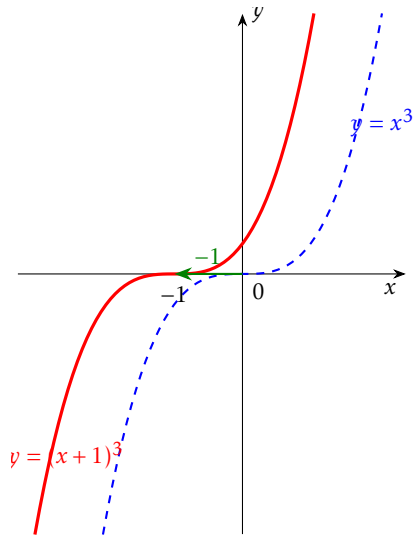
1. $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^x + 1$.
L'exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R}$.
La courbe de f_1 s'obtient à partir de celle de exp par la translation de vecteur $\vec{j} = (0,1)$.



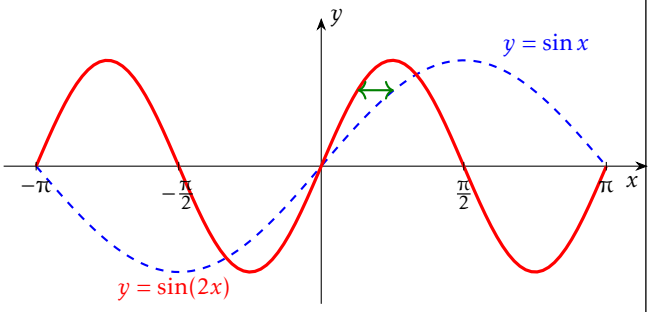
2. $f_2 : x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.
$\mathcal{D}_{f_2} =]0, +\infty[$
Pour $x > 0$, $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$ donc la courbe de f_2 est la symétrique de celle de ln par rapport à l'axe des abscisses.



3. $f_3 : x \mapsto (x+1)^3$.
$\mathcal{D}_{f_3} = \mathbb{R}$
La courbe de f_3 s'obtient à partir de celle de g par la translation de vecteur $(-1, 0)$.



4. $f_4 : x \mapsto \sin(2x)$.
$\mathcal{D}_{f_4} = \mathbb{R}$
La courbe de f_4 s'obtient à partir de celle de sin par une contraction horizontale de rapport $\frac{1}{2}$.



C-59

1. $f'(x) = 6x(x-1)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

2. $f'(x) = -2xe^{-x^2}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	0

3. $f'(x) = (1-x)e^{-x}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$1+e^{-1}$	↘	1

4. $f'(x) = x(2\ln(x)+1)$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	↘	$-\frac{1}{2e}$	↗	$+\infty$

5. $f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}}$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖		‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0		0	↗	$+\infty$

6. $f'(x) = -(2-x)(4x-x^2)^{-\frac{3}{2}}$

x	0		2		4
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$

7. $f'(x) = 1 - e^{-x}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	0

8. $f'(x) = -\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1	↘	0 ‖ $+\infty$	↘	1

9. $f(x) = \frac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$		$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

10. $f(x) = \frac{2x}{x^2+1} - x = \frac{x(1-x)(1+x)}{x^2+1}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\ln(2)-\frac{1}{2}$	↘	0	↗	$\ln(2)-\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$

11. $f'(x) = \frac{x(2x^2+1)}{\sqrt{x^4+x^2}}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

12. f 2π-périodique et paire donc étude sur $[0,\pi]$

$f'(x) = \sin(x)\Big(-1+2\cos(x)\Big)$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	-2

13. $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1+\tan^2(x/2)}{\tan(x/2)}$

x	0		π
$f'(x)$	‖	$+$	‖
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖