CHAPITRE

IV

SUITES – LIMITES ET COMPARAISON

Sommaire

A Limite d'une suite **2**
A.1 Suites convergentes et suites divergentes 2
A.2 Propriétés élémentaires des suites convergentes 5
A.3 Opérations sur les limites 7
A.4 Limite par encadrement 11
B Théorèmes de convergence **14**
B.1 Suites monotones 14
B.2 Suite des termes d'indices pairs et suite des termes d'indices impairs 16
B.3 Suites adjacentes 17
B.4 Composition par une fonction 18
C Comparaison de suites **19**
C.1 Négligeabilité 19
C.2 Suites équivalentes 21

A - Limite d'une suite

A.1 - Suites convergentes et suites divergentes

Définition IV-1

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et ℓ un réel.
On dit que la suite u ***admet ℓ pour limite*** ou encore qu'elle ***converge vers*** ℓ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient les termes u_n de la suite à partir d'un certain rang.

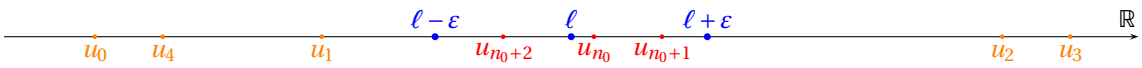
Cela revient à dire que u admet ℓ pour limite lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes u_n sauf pour un nombre fini d'indices n.

Exemple

La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.
En effet, considérons un intervalle $]a,b[$ contenant 0, on a ainsi $a<0<b$.
Dans ce cas, dès que $n \geqslant \left\lfloor \frac{1}{b} \right\rfloor + 1$, on a $0<\frac{1}{n}<b$ et *a fortiori* $a<\frac{1}{n}<b$.

Remarques

1 ► Il est équivalent de restreindre la définition aux intervalles centrés en ℓ *i.e.* de la forme $]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$ (puisque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient un tel intervalle et est contenu dans un tel intervalle) :



De façon formelle, la suite u admet ℓ pour limite lorsque :

$$\boxed{\forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N} \,/\, \forall n\geqslant n_0,\ |u_n-\ell|<\varepsilon.}$$

Par ailleurs le caractère quelconque du réel strictement positif ε assure que les formulations suivantes sont également équivalentes :

$$\forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N} \,/\, \forall n\geqslant n_0,\ |u_n-\ell|\leqslant\varepsilon \qquad \text{ou} \qquad \forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N} \,/\, \forall n\geqslant n_0,\ |u_n-\ell|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

2 ► On écrit alors : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

3 ► Si u a pour limites ℓ et ℓ' alors $\ell=\ell'$. Autrement dit la limite (si elle existe) est *unique*.

4 ► On dit qu'une suite u est ***convergente*** lorsqu'elle admet une limite ℓ.
Celle-ci étant unique on peut alors parler de **la** limite ℓ de u et on peut écrire : $\ell=\lim u$ ou $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
Une suite non convergente est dite ***divergente***.

Exemples

1 ► Une suite constante est convergente.

2 ► On vient de voir que $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, de limite 0.

3 ► La suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ n'est pas convergente.



Remarques

1 ► Une conséquence directe de la définition est que :

$$(u_n) \text{ converge vers } \ell \iff (u_n - \ell) \text{ converge vers } 0.$$

2 ► Il est clair également que :

$$(u_n) \text{ converge vers } 0 \iff (|u_n|) \text{ converge vers } 0$$

(car $u_n \in]-\varepsilon, +\varepsilon[$ si et seulement si $|u_n| \in]-\varepsilon, +\varepsilon[$).

On en déduit par exemple que la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ converge vers 0.

3 ► Si u et v coïncident à partir d'un certain rang alors u converge si et seulement si v converge et dans ce cas la limite est la même.

Autrement dit la notion de limite ne dépend pas des premiers termes d'une suite.

Définition IV-2

1. On dit que u ***a pour limite*** $+\infty$ ou encore que u ***tend vers*** $+\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $[A, +\infty[$ contient les termes u_n de la suite à partir d'un certain rang :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant A.$$

On écrit alors $\lim u = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

2. On dit que u ***a pour limite*** $-\infty$ ou encore que u ***tend vers*** $-\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $]-\infty, A]$ contient les termes u_n de la suite à partir d'un certain rang :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant A.$$

On écrit alors $\lim u = -\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

Remarques

1 ► Intuitivement, cela signifie (pour le cas de $+\infty$) que les termes de la suite sont aussi grands que l'on veut pour n assez grand :



2 ► L'unicité de la limite est ici évidente.

3 ► Une suite divergente est donc une suite qui tend vers $\pm\infty$ ou qui n'admet pas de limite.

Exemples

1 ► La suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n$ tend vers $+\infty$.

2 ► Déterminons (avec la définition) la limite d'une suite arithmétique (u_n) de raison r.

A.2 - Propriétés élémentaires des suites convergentes

Proposition IV-3

1. Une suite convergente est bornée.
2. Si u est une suite qui converge vers $\ell \neq 0$ alors, à partir d'un certain rang, u_n est non nul et reste de signe constant.

Démonstration

Proposition IV-4

1. Une suite divergente de limite $+\infty$ est minorée.
2. Une suite divergente de limite $-\infty$ est majorée.

Démonstration

Proposition IV-5

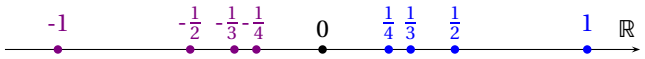
Soit u et v deux suites convergentes de limites respectives ℓ et ℓ'.

1. Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang alors $\ell \leqslant \ell'$.
2. Si u est majorée par M à partir d'un certain rang alors $\ell \leqslant$ M.
3. Si u est minorée par m à partir d'un certain rang alors $m \leqslant \ell$.

Démonstration

Remarque

Si u converge vers ℓ, v vers ℓ' et si $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang, alors on a $\ell \leqslant \ell'$ et non pas $\ell < \ell'$.
Par exemple, il suffit de considérer les suites u et v données par $u_n = \frac{-1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n}$:



A.3 - Opérations sur les limites

Dans toute cette partie, u et v désignent deux suites.

A.3.a - Cas de limites finies

Lemme IV-6

Si u est bornée et si v converge vers 0 alors la suite uv converge vers 0.

Démonstration

Proposition IV-7

Soit u et v deux suites réelles.

1. Si u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et v vers $\ell' \in \mathbb{R}$ alors $u+v$ converge vers $\ell+\ell'$.
2. Si u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et v vers $\ell' \in \mathbb{R}$ alors uv converge vers $\ell\ell'$.
3. Si u converge vers $\ell \in \mathbb{R}^*$ alors $\dfrac{1}{u}$ est définie, à partir d'un certain rang, et converge vers $\dfrac{1}{\ell}$.

Démonstration

A.3.b - Cas général

Soit u et v deux suites ayant pour limites (réelles ou infinies) ℓ et ℓ'.
► La limite de $u+v$ est donnée (lorsqu'elle existe) par le tableau suivant.

ℓ \ ℓ'	$-\infty$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$			
$\ell \in \mathbb{R}$			
$+\infty$			

Le ? désigne une *forme indéterminée* ce qui signifie que toutes les situations peuvent *a priori* se produire.
► Soit λ un réel non nul.
La limite de λu est donnée (lorsqu'elle existe) par le tableau suivant.

λ \ ℓ	$-\infty$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$\lambda < 0$			
$\lambda > 0$			

► La limite de uv est donnée (lorsqu'elle existe) par le tableau suivant.

ℓ \ ℓ'	$-\infty$	$\ell' < 0$	$\ell' = 0$	$\ell' > 0$	$+\infty$
$-\infty$					
$\ell < 0$					
$\ell = 0$					
$\ell > 0$					
$+\infty$					

▶ On suppose que v_n est non nul à partir d'un certain rang.
La limite de la suite $\frac{1}{v}$ (définie à partir d'un certain rang) est donnée (lorsqu'elle existe) par le tableau suivant.

ℓ	$-\infty$	$\ell < 0$	0^-	0	0^+	$\ell > 0$	$+\infty$
$\lim \frac{1}{v}$							

Dans ce tableau la notation $\lim v = 0^+$ signifie que v tend vers 0 **et** que v_n reste positif à partir d'un certain rang. De même, pour la notation $\lim v = 0^-$ signifie que v tend vers 0 **et** que v_n reste négatif à partir d'un certain rang.
▶ On suppose que v_n est non nul à partir d'un certain rang.
La limite de la suite $\frac{u}{v}$ (définie à partir d'un certain rang) est donnée (lorsqu'elle existe) par le tableau suivant.

ℓ \ ℓ'	$-\infty$	$\ell' < 0$	$\ell' = 0^-$	$\ell' = 0$	$\ell' = 0^+$	$\ell' > 0$	$+\infty$
$-\infty$							
$\ell \neq 0$							
$\ell = 0^-$							
$\ell = 0$							
$\ell = 0^+$							
$+\infty$							

A.3.c - Formes indéterminées

Dans le cas d'une forme indéterminée, toutes les situations peuvent se produire.

- Il existe des suites u et v vérifiant $\lim u = +\infty$ et $\lim v = -\infty$ telle que :
  - $\lim(u+v) = +\infty$
    Par exemple :
  - $\lim(u+v) = -\infty$
    Par exemple :
  - $\lim(u+v) = \ell \in \mathbb{R}$
    Par exemple :
  - $(u+v)$ n'a aucune limite finie ou infinie.
    Par exemple :
- Il existe des suites u et v vérifiant $\lim u = +\infty$ et $\lim v = 0$ telle que :
  - $\lim uv = +\infty$
    Par exemple :
  - $\lim uv = -\infty$
    Par exemple :
  - $\lim uv = \ell \neq 0$
    Par exemple :
  - $\lim uv = 0$
    Par exemple :
  - uv n'a aucune limite finie ou infinie.
    Par exemple :
- Il existe une suite v vérifiant $\lim v = 0$ telle que :
  - $\frac{1}{v}$ n'a aucune limite finie ou infinie.
    Par exemple :

A.4 - Limite par encadrement

Proposition IV-8 (théorème d'existence de limite par encadrement, ou «théorème des gendarmes»)

Soit u, v, w trois suites réelles telles que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang.
Si u et w convergent vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors v converge et $\lim v = \ell$.

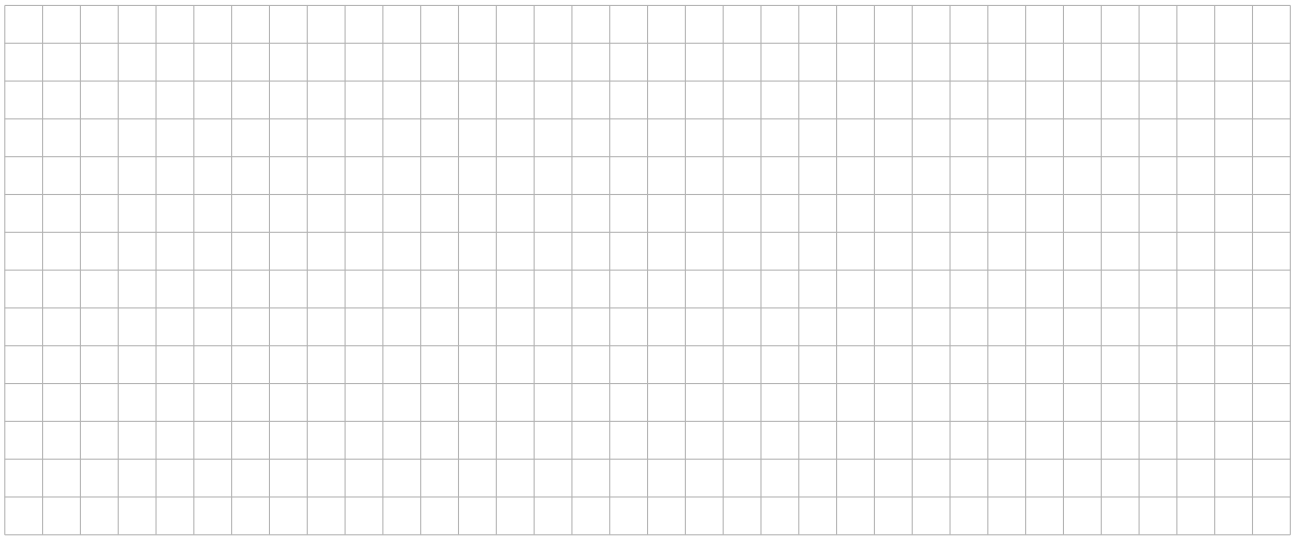
En fait, il faudrait appeler ce théorème «théorème d'existence de limite par encadrement qui, par ailleurs, donne également la valeur de la limite» car c'est bien un théorème d'existence de limite ; la valeur de cette dernière est alors assurée par un résultat antérieur.

Démonstration



Exemple

Déterminons la limite de la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$.



Remarque

En pratique, pour montrer que $\lim u = \ell$ on majore $|u_n - \ell|$ par une quantité qui tend vers 0.
En effet, d'après le résultat précédent, $|u_n - \ell|$ tend alors vers 0 donc $u_n - \ell$ tend vers 0 *i.e.* u_n tend vers ℓ.

Exemple

Montrons que le suite u définie par $u_n = \dfrac{n\cos(n) + n^2}{n^2 + 1}$ converge vers 1.

Il existe un résultat semblable pour des suites ayant une limite infinie.

Proposition IV-9

Soit u et v deux suites réelles telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

1. Si u tend vers $+\infty$ alors v aussi.
2. Si v tend vers $-\infty$ alors u aussi.

Démonstration

Exemple

Déterminons la limite de la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $v_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \left(2 - \frac{k}{2n}\right)$.

B - Théorèmes de convergence

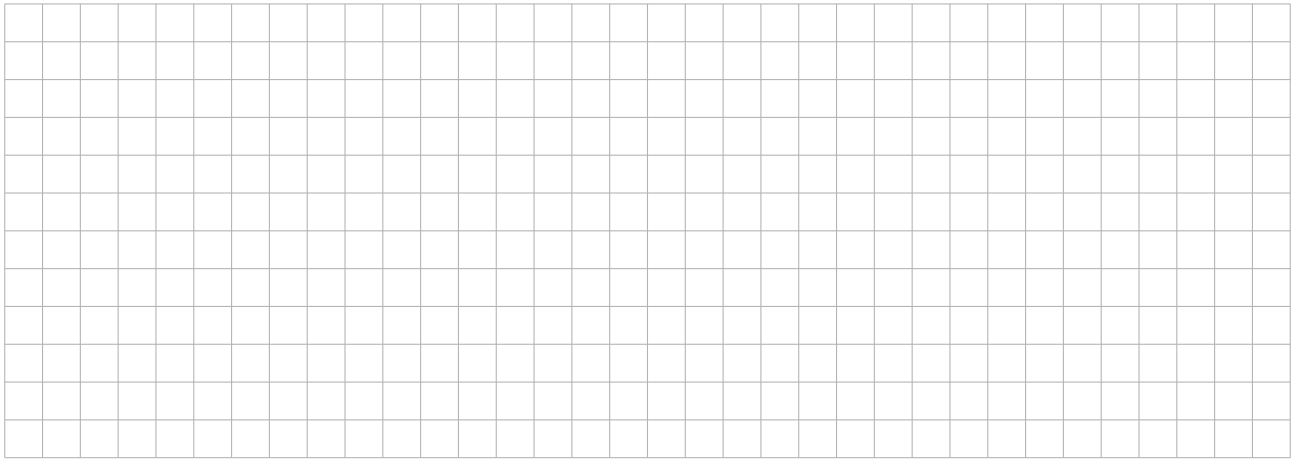
B.1 - Suites monotones

Proposition IV-10 (théorème de la limite monotone)

Soit u une suite monotone.

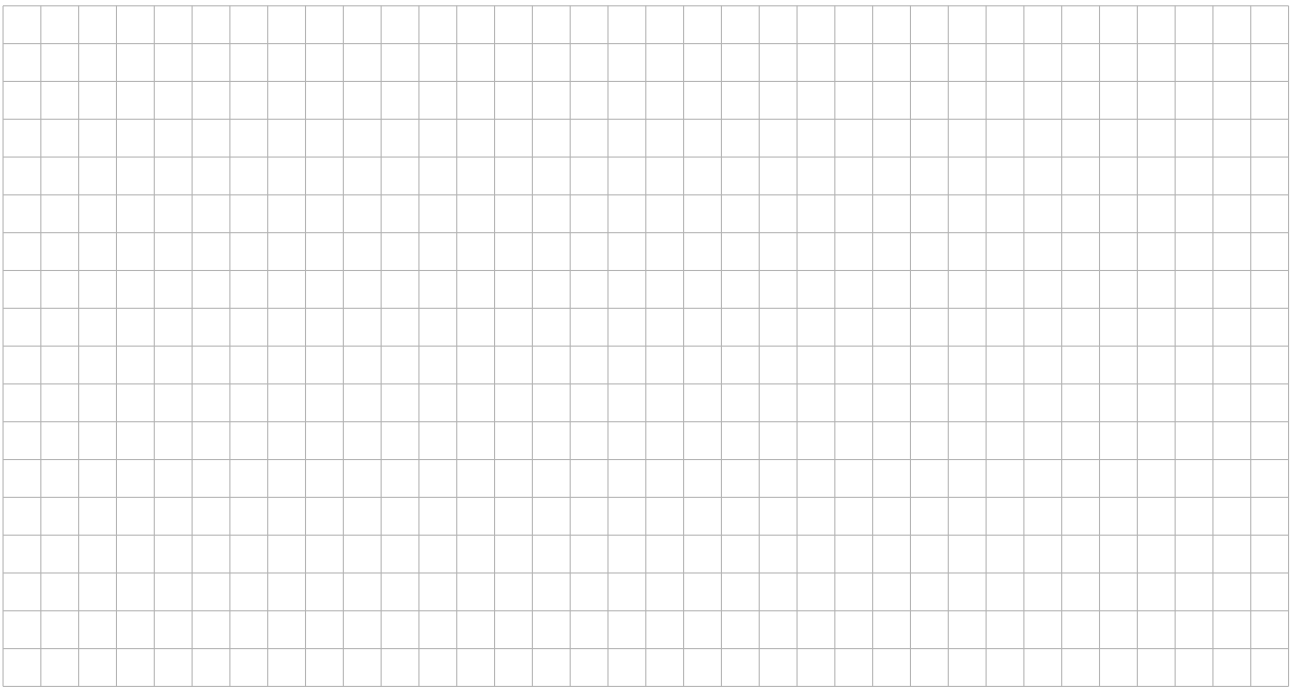
1. Si u est croissante et majorée alors elle converge.
2. Si u est décroissante et minorée alors elle converge.

Démonstration



Exemple

Montrons que la suite u, définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, est convergente.

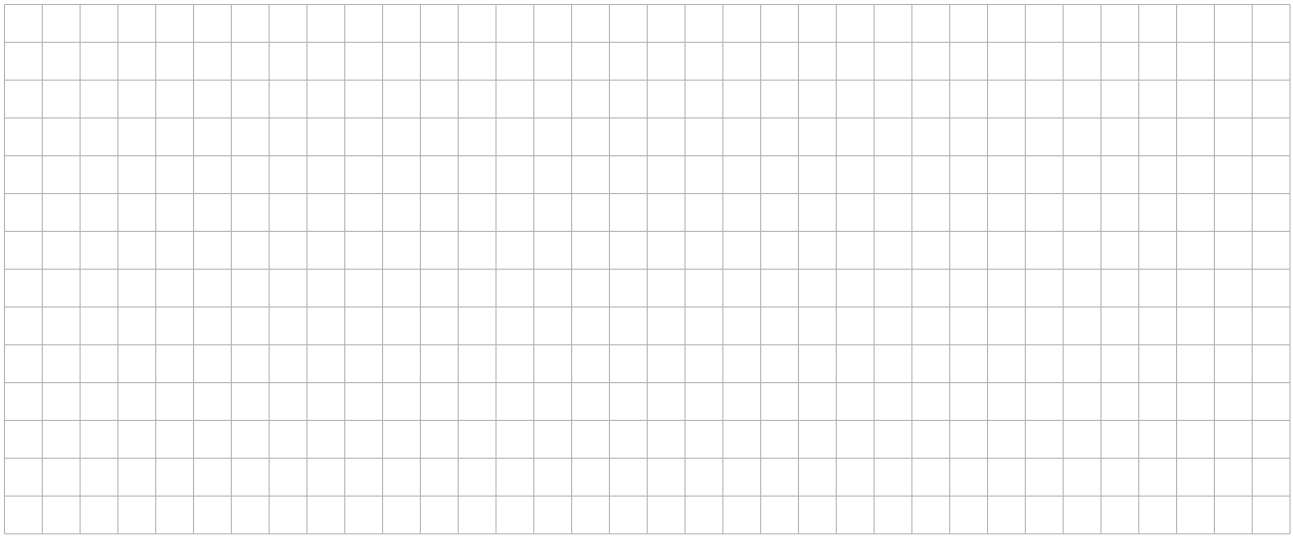


Proposition IV-11

Soit u une suite monotone.

1. Si u est croissante et non majorée alors elle tend vers $+\infty$.
2. Si u est décroissante et non minorée alors elle tend vers $-\infty$

Démonstration



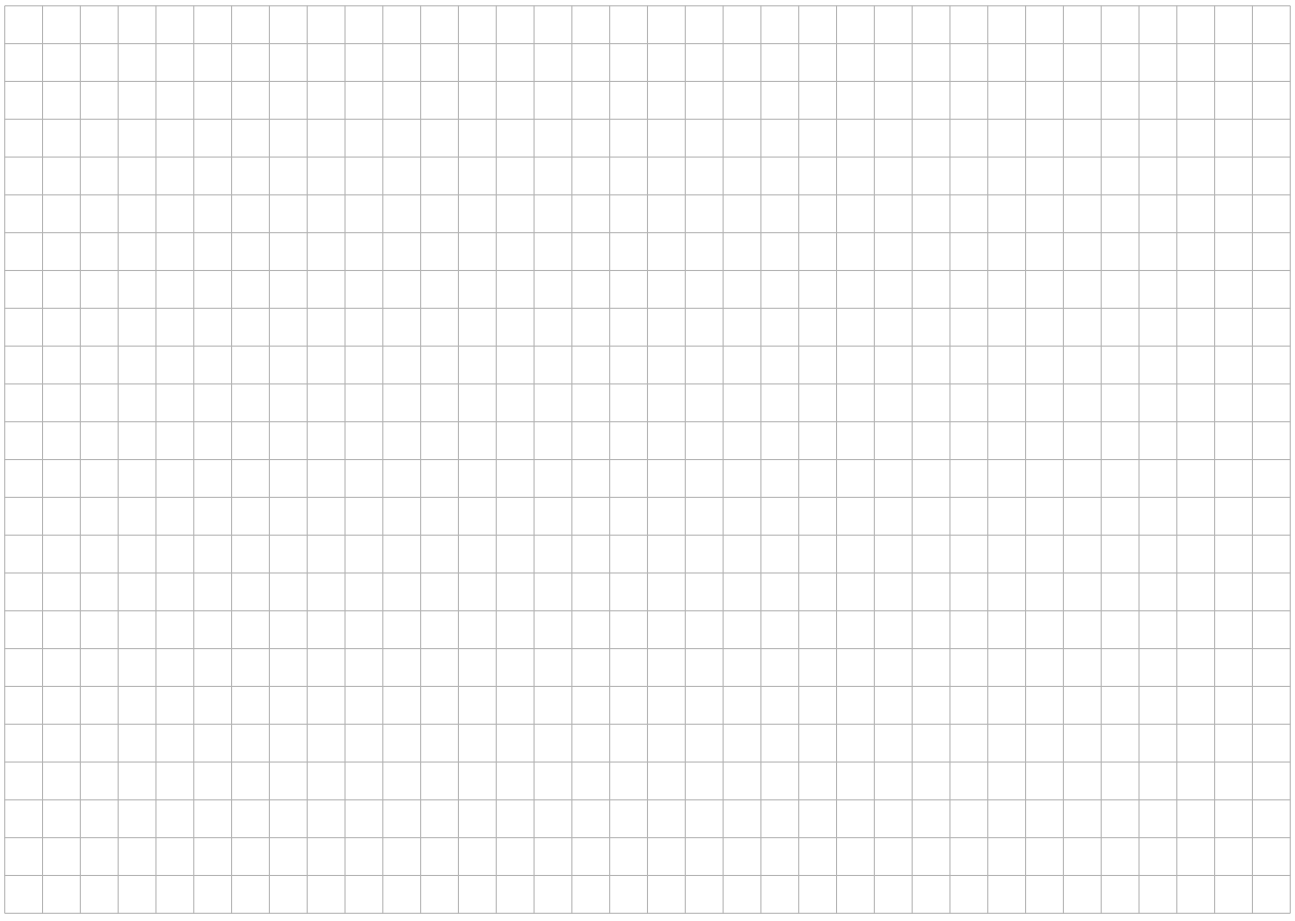
B.2 - Suite des termes d'indices pairs et suite des termes d'indices impairs

Considérons une suite u ainsi que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
On a vu dans un exercice plus haut que si u convergeait vers un réel ℓ alors il en était de même des deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
Cependant il se peut que ces deux suites convergent sans que la suite initiale ne converge. Par exemple, si $u_n = (-1)^n$ alors la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1 et la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à -1 donc ces deux suites convergent mais la suite initiale ne converge pas.
Si l'on ajoute comme hypothèse que ces deux suites convergent vers la même limite alors on obtient la convergence de la suite initiale.

Proposition IV-12

Si les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers un même réel ℓ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Démonstration



B.3 - Suites adjacentes

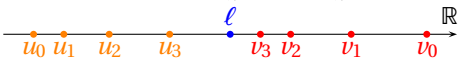
Définition IV-13

Deux suites u et v sont dites ***adjacentes*** lorsque u est croissante, v est décroissante et $u - v$ tend vers 0.

Proposition IV-14

Si u et v sont deux suites adjacentes alors u et v convergent vers une même limite ℓ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \ell \leqslant v_n.$$



Démonstration

Exemple

Pour tout réel x, les suites u et v des approximations décimales de x par défaut et par excès sont adjacentes et convergent vers x.

B.4 - Composition par une fonction

Voici un résultat qui ne peut pas être justifié pour le moment (il faut attendre l'étude des limites d'une fonction) mais nous préférons l'énoncer tout de suite en vue des exercices.

Proposition IV-15

Soit a et b réels ou $\pm\infty$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que a soit un élément ou une extrémité de I.
On suppose que f est une fonction définie sur I et que (x_n) est une suite d'éléments de I tels que :

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b \quad \text{et} \quad x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$$

alors :

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b.$$

Exemples

1 ► La suite u définie par $u_n = \mathrm{e}^{-n}$ converge vers 0.
Il suffit en effet d'appliquer le théorème avec $f = \exp$, $a = -\infty$ et $b = 0$.

2 ► La suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \ln(\frac{1}{n})$ tend vers $-\infty$.
Il suffit en effet d'appliquer le théorème avec $f = \ln$, $a = 0^+$ et $b = -\infty$.

C - Comparaison de suites

C.1 - Négligeabilité

Les suites de terme général n et n^2 tendent toutes les deux vers $+\infty$. Mais intuitivement n^2 tend vers $+\infty$ « plus vite » que n : cela peut par exemple se traduire par $\frac{n}{n^2} \xrightarrow[+\infty]{} 0$.
Nous allons formaliser cette idée.

Définition IV-16

Considérons deux suites u et v.
On dit que u est ***négligeable devant*** v lorsqu'il existe une suite ε convergeant vers 0 telle que $u_n = v_n\varepsilon_n$ à partir d'un certain rang.
On écrit alors $u_n = o(v_n)$ (on lit « u_n est un petit o de v_n »).

Remarques

1 ► Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang alors : $\boxed{u_n = o(v_n) \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$

2 ► $u_n = o(1)$ signifie que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3 ► La notation $u_n = o(0)$ est à éviter : elle signifie que $u_n = 0$ à partir d'un certain rang.

4 ► La notation o est dangereuse dans les calculs.
Dans le doute, on écrira plutôt $u_n = v_n\varepsilon_n$, avec $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exemples

1 ► Si $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p < q$ alors $n^p = o(n^q)$.
En effet, on a : $\frac{n^p}{n^q} = \frac{1}{n^{q-p}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2 ► Plus généralement si P et Q sont deux fonctions polynomiales de degré $p < q$ alors $\mathrm{P}(n) = o\Big(\mathrm{Q}(n)\Big)$.
En effet, écrivons $\mathrm{P}(n) = \sum_{k=0}^{p} a_k n^k$ et $\mathrm{Q}(n) = \sum_{k=0}^{q} b_k n^k$. Pour n assez grand, $\mathrm{Q}(n)$ est non nul et on a :

$$\frac{\mathrm{P}(n)}{\mathrm{Q}(n)} = \frac{n^p \sum_{k=0}^{p} a_k n^{k-p}}{n^q \sum_{k=0}^{q} b_k n^{k-q}} = \frac{1}{n^{q-p}} \frac{a_p + a_{p-1}\frac{1}{n} + \cdots + a_0 \frac{1}{n^p}}{b_q + b_{q-1}\frac{1}{n} + \cdots + b_0 \frac{1}{n^q}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

3 ► Autre généralisation : si α et β sont des réels tels que $\alpha < \beta$ alors $n^\alpha = o(n^\beta)$.

4 ► Si a et b sont des réels tels que $|a| < |b|$ alors $a^n = o(b^n)$.
La condition $|a| < |b|$ assure que $b \neq 0$ et que $\left|\frac{a}{b}\right| < 1$ d'où :

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

5 ► On a des résultats de ***croissances comparées*** :

- Si $a > 0$ et $q > 1$ alors :
$$n^a = o(n!) \quad , \quad q^n = o(n!) \quad \text{et} \quad n^a = o(q^n).$$
En particulier, on a : $\mathrm{e}^n = o(n!)$.
- Si $a > 0$, $b > 0$ et $q > 1$ alors :
$$\Big(\ln(n)\Big)^b = o(n^a) \quad \text{et} \quad n^a = o(q^n).$$
En particulier, pour $c > 0$:
$$n^a = o\Big(\mathrm{e}^{cn}\Big).$$

6 ► En particulier, on a $\ln(n) = o\Big(\mathrm{P}(n)\Big)$ et $\mathrm{P}(n) = o(\mathrm{e}^n)$ pour toute fonction polynomiale P de degré non nul.

Proposition IV-17

1. Si $u_n = o(v_n)$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\lambda u_n = o(v_n)$.
2. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.
3. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n + v_n = o(w_n)$.
4. Si $u_n = o(v_n)$ et $x_n = o(y_n)$ alors $u_n x_n = o(v_n y_n)$.
5. Si $u_n = o(v_n)$ alors pour toute suite (t_n) on a $u_n t_n = o(v_n t_n)$.

Démonstration

1. Il existe (ε_n) tendant vers 0 telle que $u_n = v_n\varepsilon_n$ d'où $\lambda u_n = (\lambda v_n)\varepsilon_n$.
2. Il existe ε_n tendant vers 0 telle que $u_n = v_n\varepsilon_n$ à partir d'un certain rang n_0 et il existe η_n tendant vers 0 telle que $v_n = w_n\eta_n$ à partir d'un certain rang n_1. À partir du rang $n_2 = \max(n_0, n_1)$, on a donc $u_n = (w_n\eta_n)\varepsilon_n$ et la suite $(\varepsilon_n\eta_n)$ tend bien vers 0.
3. Il existe ε_n tendant vers 0 telle que $u_n = v_n\varepsilon_n$ à partir d'un certain rang n_0 et il existe η_n tendant vers 0 telle que $v_n = w_n\eta_n$ à partir d'un certain rang n_1. À partir du rang $n_2 = \max(n_0, n_1)$, on a donc $u_n + v_n = (\varepsilon_n + \eta_n)w_n$ et la suite $(\varepsilon_n + \eta_n)$ tend bien vers 0.
4. Il existe ε_n tendant vers 0 telle que $u_n = v_n\varepsilon_n$ à partir d'un certain rang n_0 et il existe η_n tendant vers 0 telle que $x_n = y_n\eta_n$ à partir d'un certain rang n_1. À partir du rang $n_2 = \max(n_0, n_1)$, on a donc $u_n x_n = (v_n\varepsilon_n)(y_n\eta_n)$ soit $u_n x_n = v_n y_n(\varepsilon_n\eta_n)$ et la suite $(\varepsilon_n\eta_n)$ tend bien vers 0.
5. Il existe ε_n tendant vers 0 telle que $u_n = v_n\varepsilon_n$, à partir d'un certain rang n_0, d'où $u_n t_n = v_n t_n\varepsilon_n$.

C.2 - Suites équivalentes

Définition IV-18

Considérons deux suites u et v.
On dit que u est ***équivalente*** à v lorsqu'il existe une suite x convergeant vers 1 telle que $u_n = x_n v_n$ à partir d'un certain rang. On écrit alors $u_n \sim v_n$.

Remarques

1 ► Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang alors : $\boxed{u_n \sim v_n \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.}$

2 ► Cette relation est *symétrique i.e.* $u_n \sim v_n$ si et seulement si $v_n \sim u_n$.
En effet si on a $u_n = x_n v_n$ àpdcr avec $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ alors la suite $y_n = \frac{1}{x_n}$ est définie àpdcr, converge vers 1 et vérifie $v_n = y_n u_n$.

3 ► On a $u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n - v_n = o(v_n)$. On peut alors écrire $u_n = v_n + o(v_n)$.
En effet, on notant $x_n = 1 + \varepsilon_n$, la relation $u_n = v_n x_n$ devient $u_n = v_n + v_n\varepsilon_n$ *i.e.* $u_n - v_n = v_n\varepsilon_n$ et la suite (ε_n) tend vers 0 si et seulement si la suite (x_n) tend vers 1.

4 ► La notation $u_n \sim 0$ est à éviter (elle signifie que $u_n = 0$ àpdcr).

5 ► Si $\ell \in \mathbb{R}^*$ alors : $\lim u_n = \ell \iff u_n \sim \ell$.
En effet, notons $u_n = \ell + \varepsilon_n = \ell\left(1 + \frac{1}{\ell}\varepsilon_n\right)$ alors u_n tend vers ℓ si et seulement si $x_n = 1 + \frac{1}{\ell}\varepsilon_n$ tend vers 1.

Exemples

1 ► Soit P une fonction polynomiale de degré p et de coefficient dominant λ alors : $P(n) \sim \lambda n^p$.
En effet, écrivons $P(n) = \lambda a^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_k n^k$ alors (puisque $P(n)$ est non nul àpdcr) :

$$\frac{\lambda a^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_k n^k}{\lambda a^p} = 1 + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{a_k}{\lambda} \frac{1}{n^{p-k}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

2 ► On a obtenu à l'exercice C-104, l'équivalent : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.

Proposition IV-19

Soit u et v deux suites équivalentes.

1. À partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.

2. Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, alors $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

Démonstration

Par définition il existe une suite (x_n) qui converge vers 1 et un rang n_0 tels que : $\forall n \geqslant n_0, u_n = x_n v_n$. Puisque $x_n \xrightarrow[+\infty]{} 1$, il existe un rang n_1 à partir duquel $x_n \geqslant \frac{1}{2}$. En particulier x_n est stritement positif pour $n \geqslant n_1$.

- Pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$ on a $u_n = x_n v_n$ avec $x_n > 0$, ce qui prouve que u_n et v_n sont de même signe.
- Supposons que v_n soit non nul à partir d'un certain rang n_2. Si $n \geqslant n_3 = \max(n_0, n_1, n_2)$ on a alors $u_n = x_n v_n$ avec $x_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$, ce qui prouve que u_n est non nul pour $n \geqslant n_3$.

Proposition IV-20

Soit u, v, w, a et b des suites réelles.

1. Si w est négligeable devant u alors : $u_n + w_n \sim u_n$.
2. Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors : $u_n \sim w_n$.
3. Si $u_n \sim v_n$ et $a_n \sim b_n$ alors : $u_n a_n \sim v_n b_n$.
4. Si $u_n \sim v_n$ et $a_n \sim b_n$ et que $a_n \neq 0$ àpdcr alors $b_n \neq 0$ àpdcr et : $\dfrac{u_n}{a_n} \sim \dfrac{v_n}{b_n}$.

Il ne faut pas inventer de théorème !

Il faut apprendre soigneusement ces résultats et ne pas en inventer d'autres. Dans le doute on peut revenir à la définition.

En particulier, **il ne faut pas ajouter des équivalents !**

Par exemple $n^2+n \sim n^2$ et $-n^2 \sim -n^2-n$ mais $(n^2+n)+(-n^2) = n$ n'est pas équivalent à $(n^2)+(-n^2-n) = -n$.

De même, **il ne faut pas composer par une fonction !**

Par exemple on a $n^2+n \sim n^2$ mais e^{n^2+n} n'est pas équivalent à e^{n^2}.

Démonstration

1. Si $w_n = o(u_n)$ alors on écrit $w_n = u_n \varepsilon_n$ avec ε_n qui tend vers 0 d'où $u_n + w_n = u_n + u_n\varepsilon_n = u_n x_n$ avec $x_n = 1 + \varepsilon_n$ qui tend vers 1 donc $u_n + w_n \sim u_n$.
2. Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors on écrit $u_n = v_n x_n$ et $v_n = w_n y_n$ d'où $u_n = w_n x_n y_n$ et la suite $(x_n y_n)$ tend vers 1 comme produit de deux suites tendant vers 1.
3. Si $u_n \sim v_n$ et $a_n \sim b_n$ alors on écrit $u_n = v_n x_n$ et $a_n = b_n y_n$ d'où $u_n a_n = v_n b_n x_n y_n$ et la suite $(x_n y_n)$ tend vers 1 comme produit de deux suites tendant vers 1.
4. Si $u_n \sim v_n$ et $a_n \sim b_n$ alors on écrit $u_n = v_n x_n$ et $a_n = b_n y_n$ d'où $\frac{u_n}{a_n} = \frac{v_n}{b_n}\frac{x_n}{y_n}$ et la suite $(\frac{x_n}{y_n})$ tend vers 1 comme quotient de deux suites tendant vers 1.

Proposition IV-21

Soit u et v deux suites équivalentes.

1. On a alors : $|u_n| \sim |v_n|$.
2. Si $v_n > 0$ àpdcr alors il en est de même de u_n et, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a : $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.

Démonstration

1. Par définition on a àpdcr $u_n = \varepsilon_n v_n$ avec $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Ainsi, $|u_n| = |\varepsilon_n||v_n| = \varepsilon_n$ avec $|\varepsilon_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
2. On a $\frac{u_n}{v_n}$ qui tend vers 1 et la fonction f définie par $f(x) = x^\alpha$ tend vers 1 quand x tend vers 1 d'où le résultat.

Proposition IV-22

Soit u et v deux suites équivalentes. Si u a une limite ℓ (finie ou infinie) alors v a la même limite.

C'est clair en écrivant $v_n = u_n x_n$ où x_n tend vers 1.

Remarques

1 ► Deux suites équivalentes sont donc *de même nature* (convergente ou divergente).

2 ► La réciproque de cette proposition est fausse en général. Par exemple n^2 et n ont la même limite mais ne sont pas équivalentes. En revanche, cela est vrai dans le cas d'une limite **finie et non nulle** :

$$\left.\begin{array}{l} u_n \xrightarrow[+\infty]{} \ell \\ v_n \xrightarrow[+\infty]{} \ell \\ \ell \in \mathbb{R}^* \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n \sim v_n$$

En effet dans ce cas les deux suites sont non nulles àpdcr et le quotient converge vers 1.

Il ne faut pas inventer de théorème !

La conséquence de la proposition est que dans un calcul de limite où n'interviennent que des produits, des quotients et des élévations à une puissance réelle, on peut remplacer un terme par un terme qui lui est équivalent.
En particulier, on peut utiliser les équivalents suivants pour tout suite u tendant vers 0 :

$$\sin(u_n) \sim u_n \quad , \quad \tan(u_n) \sim u_n \quad , \quad 1 - \cos(u_n) \sim \frac{u_n^2}{2},$$

$$e^{u_n} - 1 \sim u_n \quad , \quad \ln(1+u_n) \sim u_n \quad et \quad (1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n.$$

Exemples

1 ► Calculons la limite de la suite u définie par : $\forall n \geqslant 2,\ u_n = n \ln \sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}$.

2 ► Calculons la limite de la suite v définie par : $\forall n \geqslant 1,\ v_n = n^2 \ln\left(2 - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

Exercice C-74

Montrer qu'une suite convergente d'entiers est une suite stationnaire.

Exercice C-75

Considérons une suite u et une fonction strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)},$$

ce qui signifie que v est une «sélection» de termes de la suite u (dans le même ordre).
Montrer que si u admet une limite (finie ou infinie) alors v admet cette même limite.

Exercice C-76

Soit $q \in \mathbb{R}$ et u la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = q^n$.
Étudier la limite de la suite u en fonction de la valeur de q.

Exercice C-77

Étudier la convergence et la limite éventuelle de la suite u définie par :

i. $u_n = n^2 + \dfrac{2}{n^3+1}$

ii. $u_n = \dfrac{2n+1}{2n-1} + \dfrac{3}{2n^2}$

iii. $u_n = \dfrac{n^3+5n}{5n^3+\cos(n)+\frac{1}{n^2}}$

iv. $u_n = \dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$ avec $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

Exercice C-78

Étudier la convergence et la limite éventuelle de la suite u définie par :

i. $u_n = \dfrac{\sin(n^2)}{n}$

ii. $u_n = \dfrac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}$

iii. $u_n = \dfrac{n^2+\sin(n)}{n^2+1}$

iv. $u_n = \sqrt{n+\cos(n)} - \sqrt{n}$

Exercice C-79

Soit u et v deux suites du segment $[0,1]$ telles que : $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
Montrer que : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Exercice C-80

Soit $x \in \mathbb{R}$, calculer la limite éventuelle de :

$$\frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2}.$$

Exercice C-81

Soit u la suite définie, pour tout $n \geqslant 1$, par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a : $u_{2n} - u_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

2. En déduire que u diverge et admet $+\infty$ pour limite.

Exercice C-82 (suite définie implicitement)

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère la fonction :

$$\begin{array}{rccc} f_n : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n - 1 \end{array}.$$

1. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe un unique réel $x_n \in]0,1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

2. En comparant $f_{n+1}(x_{n+1})$ et $f_{n+1}(x_n)$, montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement décroissante.

3. En déduire que la suite (x_n) est convergente.

4. ***a.*** Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on a :

$$x_n(1 - x_n^n) = 1 - x_n.$$

b. Montrer que la suite $\left(x_n^n\right)_{n\geqslant 2}$ converge vers 0.

c. En déduire la limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$.

Exercice C-83

Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ définies ci-dessous sont adjacentes :

$$\forall n \geqslant 2,\ u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{3n^2}.$$

Exercice C-84

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
Que peut-on en déduire ?

Exercice C-85

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \text{ et } v_n = u_n - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

1. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.$$

2. Montrer que les deux suites u et v sont adjacentes.

3. Montrer que la limite commune de u et v appartient à $]0,1[$; on la note γ et on l'appelle la *constante d'Euler.*

4. Déterminer la limite de $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)}$.

Exercice C-86

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$, à valeurs réelles, donnée pour tout $x > 0$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

a. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.

b. Représenter graphiquement la fonction f.

2. On considère une suite u vérifiant :

$$u_0 > 1 \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right).$$

a. Montrer que la suite u est minorée par 1.

b. Étudier la monotonie de la suite u.

c. Montrer que la suite u est convergente et déterminer sa limite.

d. Écrire un programme Python permettant de calculer u_n.

Exercice C-87

Comparer en l'infini, les suites de termes généraux suivants :

$$\ln(n) \quad \mathrm{e}^n \quad n^2 \quad (\ln(n))^{12} \quad n^{0,1} \quad 5^n \quad 2^n \quad n^{10} \quad \sqrt{\ln(n)} \quad n!$$

Exercice C-88

Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \sim n!$.

Exercice C-89

Trouver un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ dans les cas suivants :

1. $u_n = 3n^3 - 5n^2\sin(n) + 1000\cos(n)$

2. $u_n = 3n! - 100n^{100} - 100^n$

3. $u_n = \ln(n+3) - \ln(n+5)$

4. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$