Objectifs et savoir-faire

- ▶ *Matrices*
  - Maîtriser les opérations algébriques sur les matrices.
  - Comprendre la notion d'inversibilité d'une matrice et le lien avec les systèmes linéaires.
  - Calculer l'inverse d'une matrice.
  - Calculer des puissances de matrices (intuition et récurrence, binôme de Newton, utilisation d'un polynôme annulateur ou «diagonalisation guidée»).
  - Utiliser des puissances de matrices (notamment pour des systèmes de suites récurrentes).
- ▶ *Espace vectoriels*
  - Montrer qu'une partie d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel par la propriété de stabilité par combinaison linéaire ou à l'aide de la notation Vect.
  - Montrer, à l'aide d'un contre-exemple explicite, qu'une partie d'un espace vectoriel n'est pas un sous-espace vectoriel.
  - Maîtriser la notion de combinaison linéaire et la notation Vect ; notion de famille génératrice.
  - Constituer un « catalogue » d'espaces vectoriels de référence.

▶ Note aux colleurs –

- Tous les espaces vectoriels sont réels.
- Pas de sommes de s.e.v. pour le moment.
- Pas de notion de famille libre ni de base pour le moment (et *a fortiori* de dimension).

▶ Les exercices suivants sont à savoir refaire sans hésitation :

1. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice dont le seul coefficient non nul est celui à la place (i,j) qui vaut 1. Soit $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4$, calculer $E_{i,j}E_{k,\ell}$.

2. Trouver l'inverse éventuel des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Calculer les puissances de la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

5. Calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. À l'aide d'un polynôme annulateur, calculer les puissances de $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.

7. Pour chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}^3$, montrer que c'est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ par deux méthodes (stabilité par combinaison linéaire et notation Vect) ou montrer que ce n'est pas le cas (en explicitant un contre-exemple à la définition) :

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x+y+z = 0\right\} \text{ et } G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ xy = 0\right\}.$$

8. Pour chacune des parties suivantes de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, montrer que c'est un s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ou montrer que ce n'est pas le cas (en explicitant un contre-exemple à la définition) :

$$F = \left\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ ; \ f \text{ impaire}\right\} \text{ et } G = \left\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ ; \ f \text{ s'annule}\right\}.$$

9. Pour chacune des parties suivantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que c'est un s.e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou montrer que ce n'est pas le cas (en explicitant un contre-exemple à la définition) :

$$F = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ ; \ A \text{ triangulaire supérieure}\right\}$$

$$\text{et } G = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ ; \ \text{les coefficients diagonaux de A sont tous nuls}\right\}.$$

10. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\mathbf{a} = (0,1,1)$, $\mathbf{b} = (1,1,0)$ et $\mathbf{c} = (1,1,1)$. Montrer que $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.