TD 8 – Puissances d'une matrice

Objectifs et savoir-faire

- Connaître la notion de puissance d'une matrice et de polynôme d'une matrice.
- Maîtriser différentes techniques de calcul des puissances d'une matrice.
- Exploiter le calcul des puissances d'une matrice.
- Utiliser des polynômes de matrices.

1 - Notion de puissance d'une matrice et de polynôme d'une matrice

Si A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors on peut définir les ***puissances*** de A en posant :

$$\mathrm{A}^0 = \mathrm{I}_n \quad \text{et : } \forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{A}^{k+1} = \mathrm{A} \times \mathrm{A}^k \left(= \mathrm{A}^k \times \mathrm{A}\right).$$

Exemples

1 ► Si $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ alors : $\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathrm{A}^3 = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$, …

2 ► Si $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors : $\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{A}^3 = 0_3$, $\mathrm{A}^4 = 0_3$, …

On montre aisément par récurrence que lorsque D est une matrice diagonale, ses puissances s'obtiennent en élevant les coefficients diagonaux à cette puissance :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, un ***polynôme de matrice*** est une expression de la forme P(A) où $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[x]$ c'est-à-dire une expression de la forme :

$$a_p \mathrm{A}^p + a_{p-1}\mathrm{A}^{p-1} + \cdots a_1 \mathrm{A} + a_0 \mathrm{I}_n$$

où les a_j sont des réels et $p \in \mathbb{N}$.

On dit qu'un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[x]$ est un ***polynôme annulateur*** de A lorsque P(A) est la matrice nulle c'est-à-dire, en notant $\mathrm{P}(x) = \sum_{j=0}^{p} a_j x^j$, lorsque :

$$a_p \mathrm{A}^p + a_{p-1}\mathrm{A}^{p-1} + \cdots a_1 \mathrm{A} + a_0 \mathrm{I}_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.$$

Exemples

1 ► Si $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{P}(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$ alors :

2 ► Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, on a :

2 - Quelques méthodes de calcul

2.a - Démontrer par récurrence une expression supposée

Une première idée consiste à calculer les premières puissances de la matrice, à conjecturer si c'est possible une expression générale puis à démontrer ladite expression par récurrence.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix},\ A^4 = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}.$$

Montrons alors par récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$ la propriété :

$$\mathcal{P}(n) :\ \text{«}A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

L'expression de A correspond à $\mathcal{P}(1)$ et les calculs précédents montrent que $\mathcal{P}(2)$, $\mathcal{P}(3)$ et $\mathcal{P}(4)$ sont vérifiées.

Soit $n \geqslant 4$ tel que l'on ait $\mathcal{P}(n)$. Montrons que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.

On a :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(par l'hypothèse } \mathcal{P}(n)\text{)} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n-1} + 2^{n-1} & -2^{n-1} - 2^{n-1} \\ -2^{n-1} - 2^{n-1} & 2^{n-1} + 2^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & -2^n \\ -2^n & 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et l'on a bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Par récurrence, on a $\mathcal{P}(n)$ pour tout $n \geqslant 1$ c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Exercice 8-1

Calculer les puissances de la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.b - Exploiter une relation polynomiale

Soit P un polynôme annulateur de A de degré p alors la division euclidienne de x^n par $P(x)$ s'écrit :

$$x^n = Q(x)P(x) + R(x) \text{ avec } \deg(R) \leqslant p-1.$$

On en déduit :

$$A^n = Q(A)P(A) + R(A) \text{ donc } A^n = R(A).$$

Si P est à racines simples $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ alors en évaluant la relation $x^n = Q(x)P(x) + R(x)$ aux racines de P, on obtient :

$$R(\alpha_1) = 0, \ \ldots, R(\alpha_p) = 0.$$

Puisque R est de degré au plus $p-1$, ces p relations permettent de déterminer les coefficients de R.

Exercice 8-2

Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la matrice $A^2 - 3A + 2I_2$.

2. Soit $n \geqslant 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de x^n par $x^2 - 3x + 2$.

3. En déduire la matrice A^n.

Exercice 8-3

On considère la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 & 6 \\ -3 & -4 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -4 & -3 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 puis trouver des réels α et β tels que $A^2 + \alpha A + \beta I_4 = 0_4$.

2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le reste de la division euclidienne de x^n par le polynôme $x^2 + \alpha x + \beta$.

4. En déduire la matrice A^{2024} en fonction des matrices A et I_4.

2.c - Utiliser la formule du binôme

On dispose dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une formule du binôme de Newton.
Si A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent (*i.e.* $AB = BA$) alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ (A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^{k-j} B^j.$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a :

$$A = I_2 + N \text{ avec } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $I_2 N = N I_2$ donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} A^k &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} I_2^{k-j} N^j \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} N^j. \end{aligned}$$

On a $N^2 = 0_2$ donc $N^j = 0_2$ pour tout $j \geqslant 2$. On en déduit pour tout entier $k \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} A^k &= \sum_{j=0}^{1} \binom{k}{j} N^j + \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} \underbrace{N^j}_{=0_2} \\ &= \binom{k}{0} N^0 + \binom{k}{1} N^1 + 0_2 \\ &= I_2 + kN \end{aligned}$$

d'où :

$$\forall k \geqslant 2,\ A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et l'on remarque que cette expression est également vraie pour $k = 0$ et $k = 1$.

Exercice 8-4

Calculer les puissances des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

2.d - Utiliser une matrice diagonale

Tout d'abord, si $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ alors on adopte la notation suivante : $\text{Vect}(u) = \left\{(\lambda a, \lambda b, \lambda c)\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.
Par exemple, si $u = (1, 1, 2)$ alors on note : $\text{Vect}(u) = \left\{(\lambda, \lambda, 2\lambda)\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$;
si $v = (-1, 1, 0)$ alors on note : $\text{Vect}(v) = \left\{(-\lambda, \lambda, 0)\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

Exercice 8-5

On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Soit λ un réel. Montrer que $A - \lambda I_3$ est inversible si et seulement si $\lambda \notin \{-1; 1; 3\}$.

2. Résoudre le système homogène dont la matrice est $A + I_3$.
En déduire un triplet $u \in \mathbb{R}^3$ tel que l'ensemble des solutions de ce système soit $\text{Vect}(u)$.

3. Résoudre le système homogène dont la matrice est $A - I_3$.
En déduire un triplet $v \in \mathbb{R}^3$ tel que l'ensemble des solutions de ce système soit $\text{Vect}(v)$.

4. Résoudre le système homogène dont la matrice est $A - 3I_3$.
En déduire un triplet $w \in \mathbb{R}^3$ tel que l'ensemble des solutions de ce système soit $\text{Vect}(w)$.

5. On note P la matrice dont la première colonne est constituée par les composantes de u, la deuxième par celles de v et la troisième par celles de w.
Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

6. Calculer le produit AP puis le produit $P^{-1}AP$.

7. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

$$A^n = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

3 - Exploitation des puissances d'une matrice

Exercice 8-6

On considère trois suites réelles x, y et z données par leurs premiers termes x_0, y_0 et z_0 et par les relations de récurrence suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{6}y_n + \frac{1}{6}z_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{6}x_n + \frac{2}{3}y_n + \frac{1}{6}z_n \\ z_{n+1} = \frac{1}{6}x_n + \frac{1}{6}y_n + \frac{2}{3}z_n \end{cases}.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

Déterminer $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{A}\mathrm{X}_n.$$

2. Exprimer A en fonction de I_3 et de la matrice :

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Calculer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, les puissances de J.

4. Déterminer l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. En déduire l'expression en fonction de n des suites (x_n), (y_n) et (z_n).

6. En déduire les limites des trois suites (x_n), (y_n) et (z_n).

Exercice 8-7

On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2.

2. Trouver des réels u_2 et v_2 tels que l'on ait : $\mathrm{A}^2 = u_2\mathrm{A} + v_2\mathrm{I}_2$.

3. On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n + v_n \\ v_{n+1} = -6u_n \end{cases}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\mathrm{A}^n = u_n\mathrm{A} + v_n\mathrm{I}_2$.

4. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation entre u_{n+2}, u_{n+1} et u_n.

5. En déduire, en fonction de n, l'expression de u_n puis celle de v_n.

Exercice 8-8

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Soit λ un réel. Montrer que $A - \lambda I_3$ est inversible si et seulement si $\lambda \notin \{-2; -1; 1\}$.

2. Résoudre le système homogène dont la matrice est $A + 2I_3$.
En déduire un triplet $u \in \mathbb{R}^3$ tel que l'ensemble des solutions de ce système soit $\text{Vect}(u)$.

3. Résoudre le système homogène dont la matrice est $A + I_3$.
En déduire un triplet $v \in \mathbb{R}^3$ tel que l'ensemble des solutions de ce système soit $\text{Vect}(v)$.

4. Résoudre le système homogène dont la matrice est $A - I_3$. En déduire un triplet $w \in \mathbb{R}^3$ tel que l'ensemble des solutions de ce système soit $\text{Vect}(w)$.

5. On note P la matrice dont la première colonne est constituée par les composantes de u, la deuxième par celles de v et la troisième par celles de w.
Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

6. Calculer le produit AP puis le produit $P^{-1}AP$.

7. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

$$A^n = P \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

8. On considère les trois suites réelles x, y et z définies par $x_0 = 1$, $y_0 = -1$, $z_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - y_n - 2z_n \\ y_{n+1} = 4x_n - 3y_n - 2z_n \\ z_{n+1} = x_n - y_n - z_n \end{cases}.$$

Exprimer x_n, y_n et z_n en fonction de l'entier n.